3　动量守恒定律和能量守恒定律

任课教师　曾灏宪

中原工学院　理学院

大学物理（上）

3　动量守恒定律和能量守恒定律

3.4 动能定理（功和动能的关系）

一　功

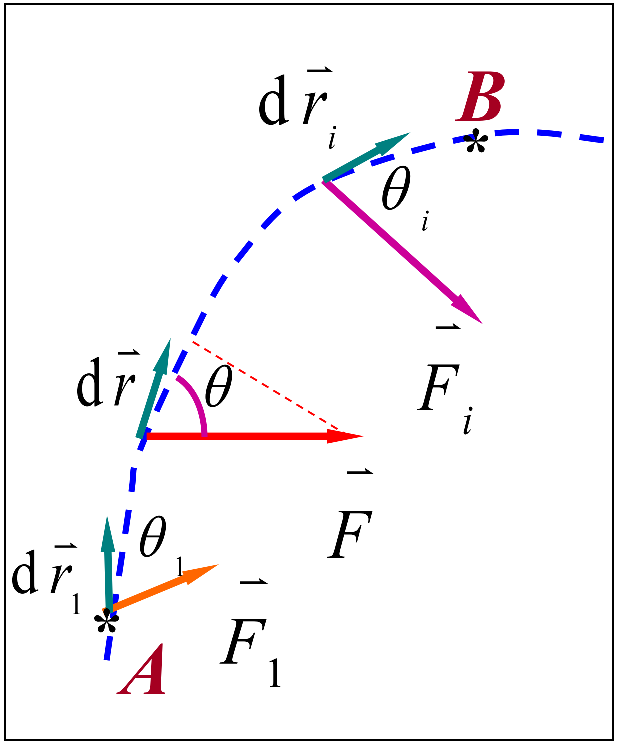
力的空间累积效应

定义 力对质点所作的功 = 力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$\boxed{\text{元功}}$

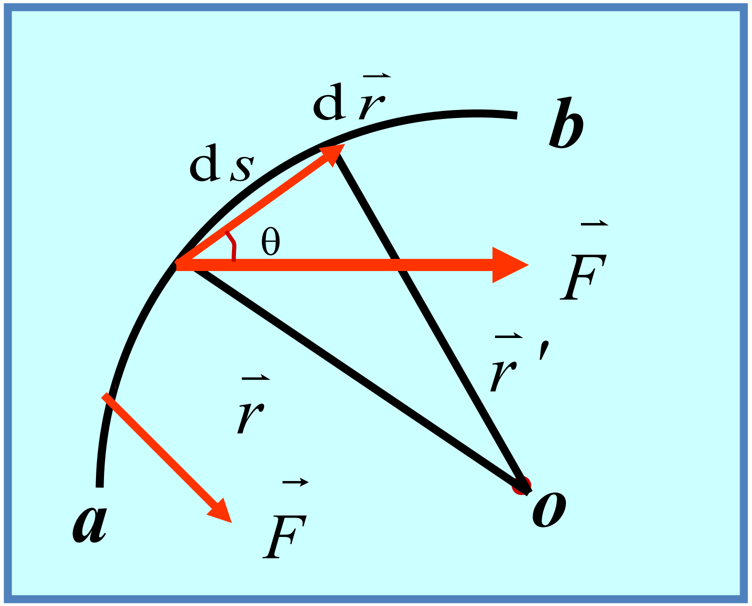
(点乘，内积或标量积)



功的单位　焦耳　$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$

功的计算 根据功的定义进行计算

1. 变力的功



微元分析法：

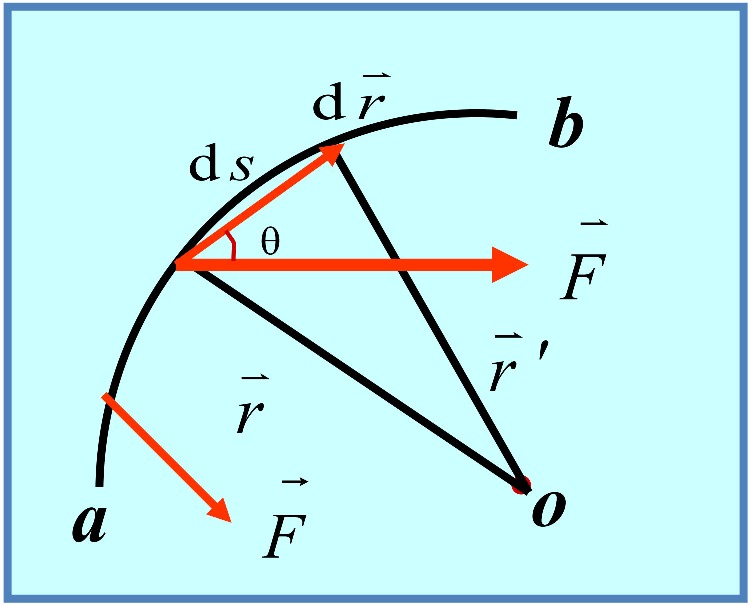
取微元过程
以直代曲
以不变代变

求和/积分

元功：$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$= F|d\vec{r}|\cos\theta$$

$$= F\mathrm{d}s\cos\theta$$



质点沿曲线 L 从 a 运动到 b 力 F 所做的功：

$$W=\int_a^b \mathrm{d}W=\int_a^b F\cos\theta\,\mathrm{d}s=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

在直角坐标系中：

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$$

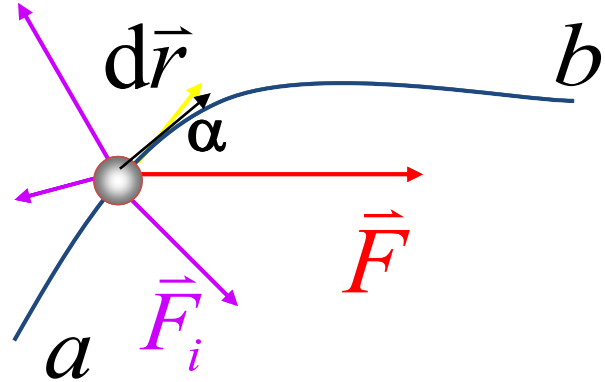
$$d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$$

$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

总功：

$$W=\int_a^b \mathrm{d}W=\int_a^b F\cos\theta\,\mathrm{d}s=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b \left(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z\right)$$

2. 合力的功



$$W=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_L \left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\cdots+\overrightarrow{F_n}\right)\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_L \overrightarrow{F_1}\cdot d\vec{r}+\int_L \overrightarrow{F_2}\cdot d\vec{r}+\cdots+\int_L \overrightarrow{F_n}\cdot d\vec{r}$$

$$W=W_1+W_2+\cdots+W_n$$

合力的功等于各分力的功的代数和

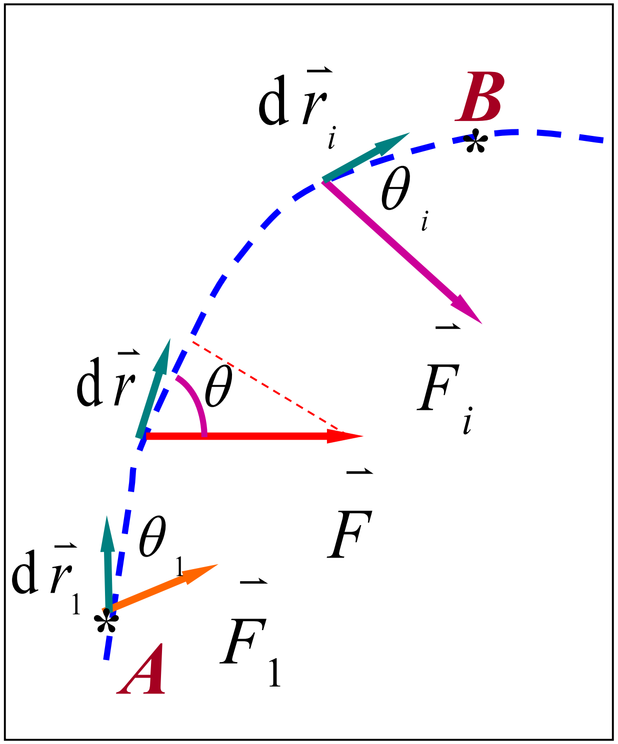
注意：

①功是标量（代数量）

$$\begin{cases} W>0 & \text{力对物体做功} \\ W<0 & \text{物体反抗阻力做功} \\ W=0 & \text{两种情况：} \end{cases}$$

❖ 力作用点无位移；

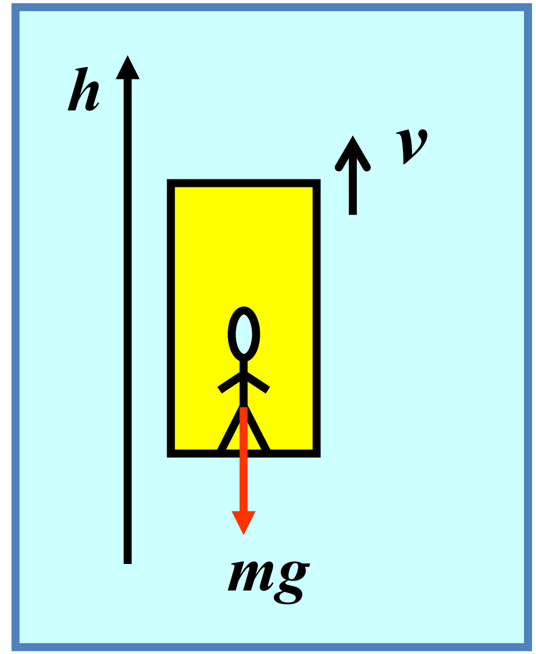
❖ 力与位移相互垂直。



② 功是过程量

与作用点的位移相关

一个力所做的功与参考系的选择相关，是相对量



地面系

$W_G \neq 0$

电梯系

$W_G = 0$

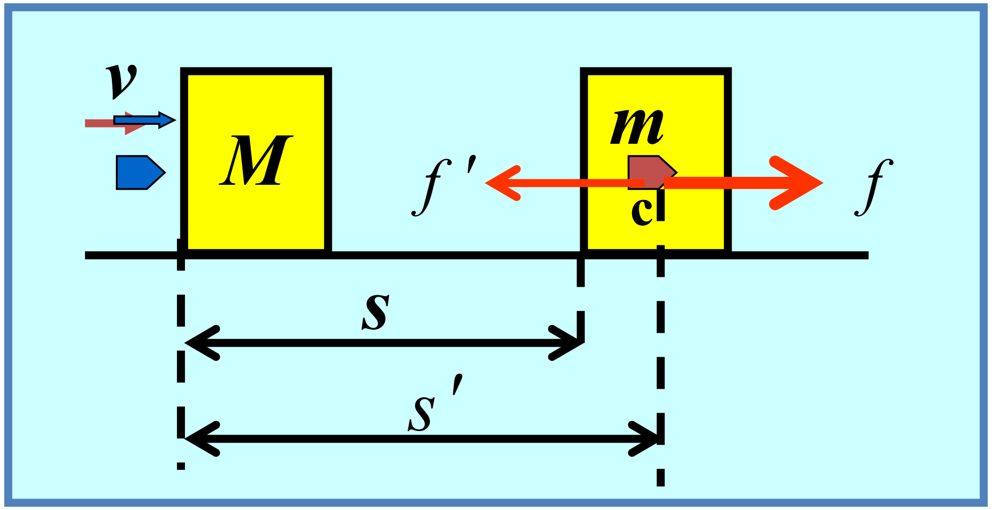
③ 一对作用力与反作用力做功的代数和不一定为零

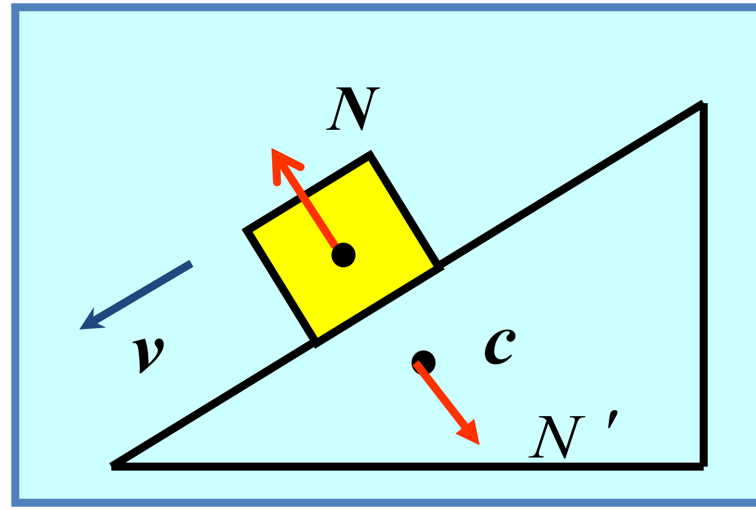
力作用点的位移不一定相同

➢ 一对作用力与反作用力做功的代数和与参考系的选择无关。

➢ 质点系内力做功的代数和不一定为零。

质点系内力做功的代数和不一定为零





$$w_f + w_{f'} < 0$$

$$w_N + w_{N'} = 0$$

下列条件下，一对内力做功为零

- 作用点无相对位移
- 相互作用力与相对位移垂直

功率 功率是反映做功快慢程度的物理量。

功率：单位时间内所作的功。

平均功率：$\overline{P}=\dfrac{\Delta W}{\Delta t}$

瞬时功率：$P=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta W}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

$$P=Fv\cos\theta$$

功率的单位（瓦特）$1\,\mathrm{W}=1\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$　$1\,\mathrm{kW}=10^{3}\,\mathrm{W}$

二 质点的动能定理（功和动能的关系）

◆ 动能（状态函数）

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}mv^2}$$

$$W=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int F_t\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\int F_t\,\mathrm{d}s \qquad F_t=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$W=\int m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=\int_{v_1}^{v_2}mv\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

◆ 动能定理

合外力对质点所作的功,等于质点动能的增量 .

$$\boxed{W=E_{k2}-E_{k1}}$$

注意 功和动能都与参考系有关；动能定理仅适用于惯性系 .

例题和练习

例　一个质点在恒力 $\vec{F} = -3\vec{i} - 5\vec{j} + 9\vec{k}\,(\mathrm{N})$ 作用下的位移为，$\Delta\vec{r} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}\,(\mathrm{m})$ 则这个力在该位移过程中所作的功为：

(A) $67\ J$，　　(B) $91\ J$，

(C) $17\ J$，　　(D) $-67\ J$

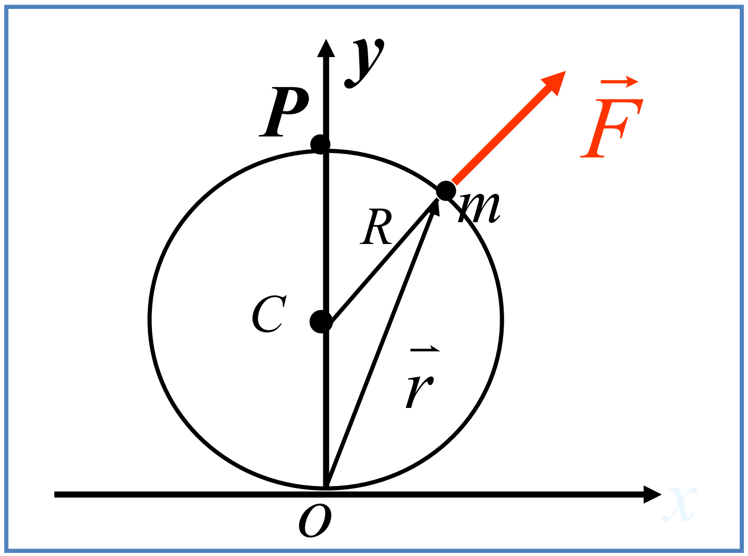
$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

恒力的时候才能这么写

$$= (4\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k})\cdot(-3\vec{i} - 5\vec{j} + 9\vec{k})$$

$$= 67\ J$$

例题 一质点做圆周运动，有一力 $\vec{F}=F_0(x\vec{i}+y\vec{j})$ 作用于质点，在质点由原点至 $P(0,2R)$ 点过程中，力 $\vec{F}$ 做的功 $A=?$



解：

$$\vec{F}=F_0x\vec{i}+F_0y\vec{j}$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}$$

$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_0^0F_0x\,\mathrm{d}x+\int_0^{2R}F_0y\,\mathrm{d}y=2F_0R^2$$

例题 设作用在质量为2kg的物体上水平方向的合力F =6t(N)。如果物体由静止出发沿直线运动，在头2s内这力作了多少功？

解： 由牛顿第二定律 $a = \frac{F}{m} = \frac{6t}{2} = 3t$

$$\because \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \therefore \quad \mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t = 3t\,\mathrm{d}t$$

两边积分： $\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t 3t\mathrm{d}t \qquad v = \frac{3}{2}t^2$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t = \frac{3}{2}t^2\mathrm{d}t$$

$$W = \int F\cdot\mathrm{d}x = \int_0^2 6t\cdot\frac{3}{2}t^2\mathrm{d}t = \frac{9}{4}t^4\Big|_0^2 = 36 \quad (\mathrm{J})$$

分析

列方程

求解

例 甲、乙、丙三物体的质量之比是1：2：3，若它们的动能相等，并且作用于每一个物体上的制动力都相同，则它们制动距离之比是：

（A）1：2：3　　（B）1：4：9

（C）1：1：1　　（D）3：2：1

分析：

由动能定理可知三个制动力对物体所作的功相等；在这三个相同的制动力作用下，物体的制动距离是相同的.

例 今有倔强系数为k的弹簧（质量忽略不计）竖直放置，下端悬挂一小球，球的质量为m_0，开始时使弹簧为原长而小球恰好与地接触。今将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止，在此过程中外力作功为$\underline{\quad m^2g^2/2k \quad}$。

解：小球刚能脱离地面时，弹簧伸长量为 $x=\dfrac{mg}{k}$

$$\therefore \quad A_{弹}=\int_0^{\frac{mg}{k}}(-kx)\mathrm{d}x=-\frac{m^2g^2}{2k}$$

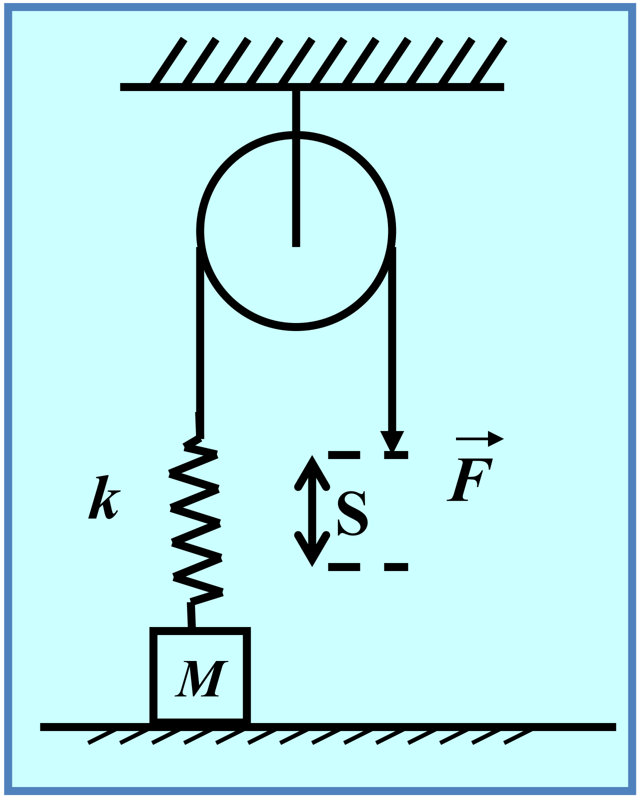
$$A_{外}=-A_{弹}=\frac{m^2g^2}{2k}$$

练习1：

如图 M=2kg , k =200Nm^{-1} , S=0.2m , $g\approx$ 10m·s^{-2}

不计轮、绳质量和摩擦,弹簧最初为自然长度,

缓慢下拉, 则 $W_F = ?$



解：用 F 将绳端下拉0. 2 m , 物体

M将上升多高?

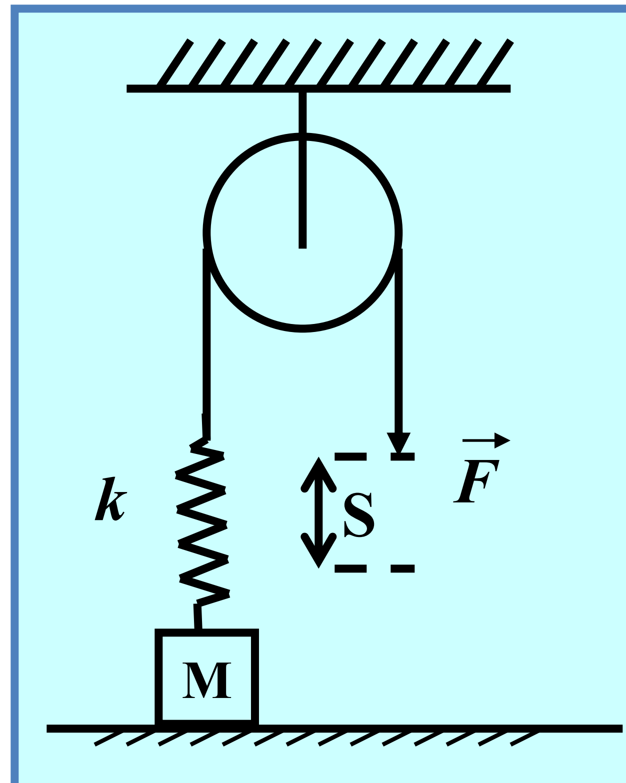
$$\because \quad kx_0 = Mg \rightarrow x_0 = 0.1\,\text{m}$$

$$S = 0.2\,\text{m}$$

得 $\begin{cases} \text{弹簧伸长 } 0.1\ \text{m} \\ \text{物体上升 } 0.1\ \text{m} \end{cases}$

缓慢下拉:每时刻物体处于平衡态

$$F=\begin{cases} k\,x & (0<x\leq 0.1\text{m})\ \text{前0.1m为变力} \\ k\,x_0=Mg & (0.1<x\leq 0.2\text{m})\ \text{后0.1m为恒力} \end{cases}$$



$$W=\int_0^{0.1} kx\,\mathrm{d}x+\int_{0.1}^{0.2} Mg\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{0.1}+Mgx\Big|_{0.1}^{0.2}$$

$$=3\,(\mathrm{J})$$

例 质量为10kg 的质点，在外力作用下做平面曲线运动，该质点的速度为 $\vec{v} = 4t^2\vec{i} + 16\vec{j}$ ，开始时质点位于坐标原点。

求 在质点从 $y = 16\mathrm{m}$ 到 $y = 32\mathrm{m}$ 的过程中，外力做的功。

解 $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = 4t^2\mathrm{d}t$

$v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 16 \Rightarrow y = 16t \Rightarrow \begin{cases} y = 16\text{时} & t = 1 \\ y = 32\text{时} & t = 2 \end{cases}$

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 80t \qquad F_y = m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$W = \int F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y = \int_1^2 320t^3\mathrm{d}t = 1200\,\mathrm{J}$$

作业

- P77：16；17

版权声明

本课件根据高等教育出版社《物理学教程（第二版）上册》（马文蔚 周雨青 编）配套课件制作。课件中的图片和动画版权属于原作者所有；部分例题来源于清华大学编著的“大学物理题库”；其余文字资料由 Haoxian Zeng 编写，采用 知识共享 署名-相同方式共享 3.0 未本地化版本 许可协议进行许可。详细信息请查看课件发布页面。