3　动量守恒定律和能量守恒定律

任课教师　曾灏宪

中原工学院　理学院

质点的运动 ⇨ • 力是物体运动状态发生改变的原因

牛顿三定律 • 力与运动状态瞬时对应

实际中，我们可能并不关心过程而只关心结果！

考察两种方法：

- 力在一段时间内的作用结果 → 冲量
- 力在一段路程中的作用结果 → 功

3.1 质点和质点系的动量定理

一　冲量 & 动量 & 质点的动量定理

- 动量 $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}(m\vec{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

- 冲量　力对时间的积分（矢量） $\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t}$

动量定理 在给定的时间内，外力作用在质点上的冲量，等于质点在此时间内动量的增量．

讨论： 冲量是矢量，它的方向是不是力的方向？

◆ 分量形式

$$\vec{I} = I_x \vec{i} + I_y \vec{j} + I_z \vec{k}$$

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = m v_{2x} - m v_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = m v_{2y} - m v_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = m v_{2z} - m v_{1z} \end{cases}$$

注意：牛顿第二定律反映了力的瞬时效应；而动量定理则反映力对时间的累积效应，即加速度与合外力对应，而动量变化与合外力的冲量对应。

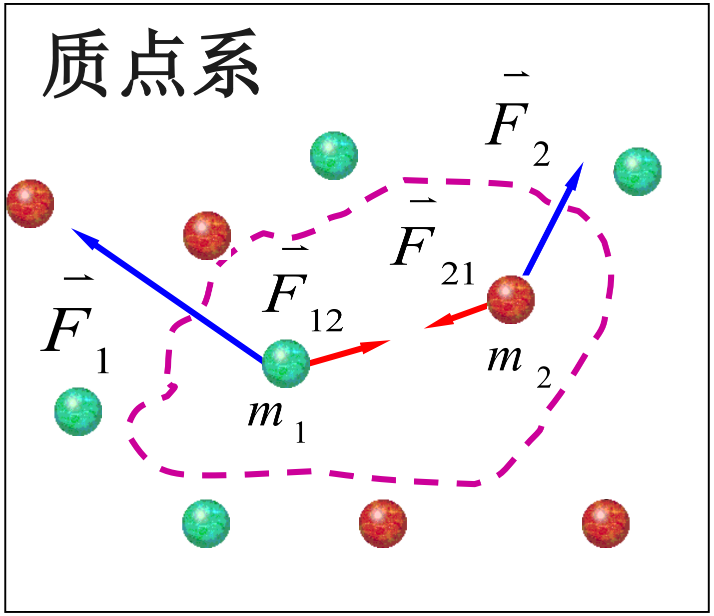
二　质点系的动量定理

简单情况：两个质点的情况

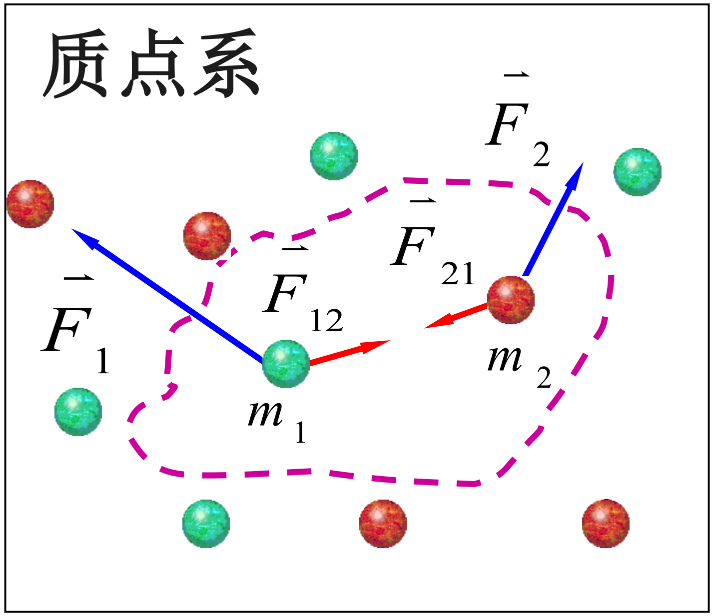
先分别考察这两个质点

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{12})\,\mathrm{d}t=m_1\vec{v}_1-m_1\vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{21})\,\mathrm{d}t=m_2\vec{v}_2-m_2\vec{v}_{20}$$



再合在一起考虑



因为内力 $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$ ，故

$$\vec{F}_{内}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i内}\equiv 0 \qquad \vec{I}_{内}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{内}\mathrm{d}t\equiv 0$$

于是，

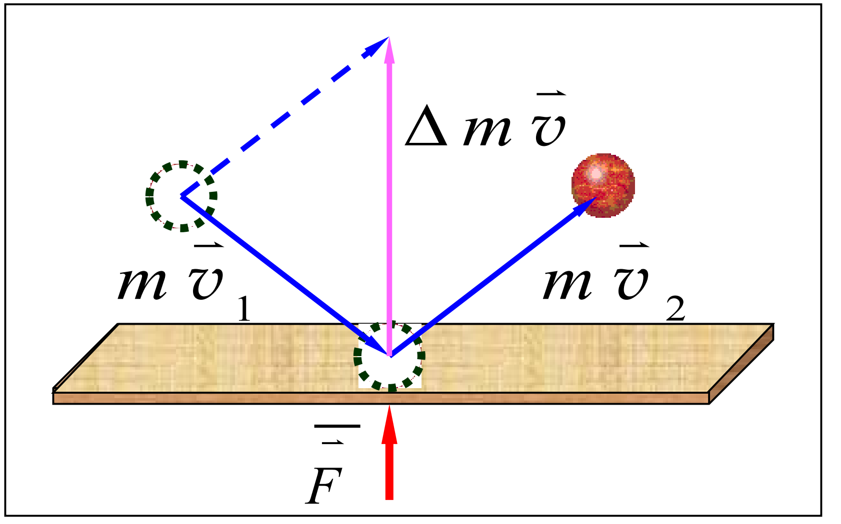
$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t=(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$

质点系动量定理 作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量.

$$\boxed{\vec{I}=\vec{p}-\vec{p}_0} \qquad \boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}}$$

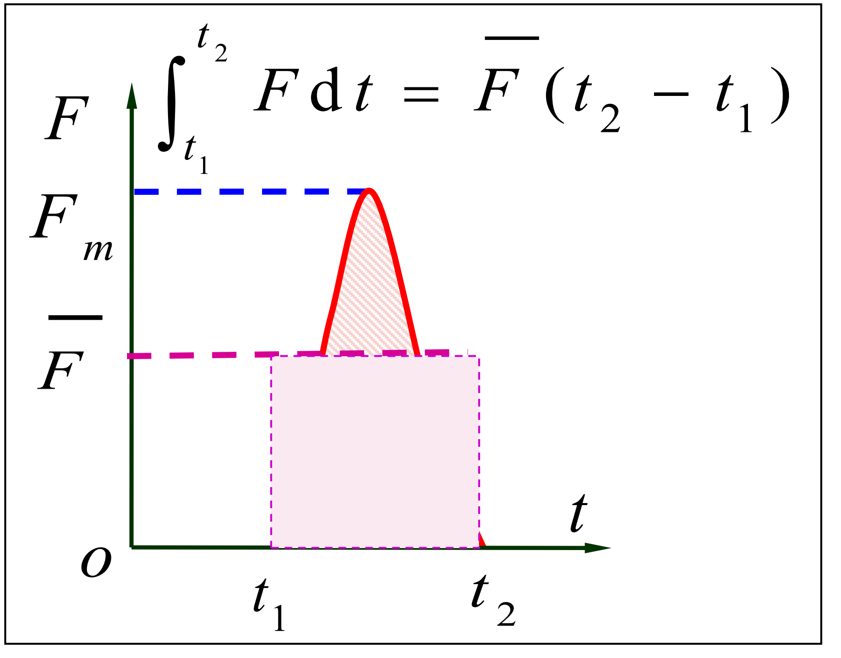
动量定理常应用于碰撞问题：求平均作用力

$$\overline{\vec{F}}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t}{t_2-t_1}=\frac{m\vec{v}_2-m\vec{v}_1}{t_2-t_1}$$



注意

$\Delta\vec{p}$ 一定时，Δt 越小，则 $\overline{F}$ 越大．



例如人从高处跳下、飞机与鸟相撞、打桩等碰撞事件中，作用时间很短，冲力很大．

思考题：

问：为什么迅速地把盖在杯上的薄板从侧面打去，鸡蛋就掉在杯中；慢慢地将薄板拉开，鸡蛋就会和薄板一起移动？

答：因为鸡蛋和薄板间的摩擦力有限，若棒打击时间很短，$\because \vec{F}_{\mathrm{f}} \Delta t \to 0$，$\therefore \Delta \vec{P}_{蛋} \to 0$ 所以鸡蛋就掉在杯中.

大学物理（上）

3　动量守恒定律和能量守恒定律

3.2 动量守恒定理

质点系动量定理 $\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}}\,\mathrm{d}t=\sum_i \vec{p}_i-\sum_i \vec{p}_{i0}$

动量守恒定律

若质点系所受的合外力为零 $\vec{F}^{\text{ex}}=\sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}}=0$

则系统的总动量守恒，即 $\vec{p}=\sum_i \vec{p}_i$ 保持不变．

力的**瞬时**作用规律 $\vec{F}^{\text{ex}}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$， $\vec{F}^{\text{ex}}=0$， $\vec{P}=\vec{C}$

1）适用条件：系统的动量守恒是指系统的总动量不变，系统内任一物体的动量是可变的，各物体的动量必相对于同一惯性参考系．

2）守恒条件　合外力为零 $\vec{F}^{\mathrm{ex}}=\sum_i \vec{F}_i^{\mathrm{ex}}=0$

当 $\vec{F}^{\mathrm{ex}} \ll \vec{F}^{\mathrm{in}}$ 时，可略去外力的作用，近似地认为系统动量守恒．例如在碰撞，打击，爆炸等问题中．

3）若某一方向合外力为零，则此方向动量守恒．

$$
\begin{cases}
F_x^{\mathrm{ex}}=0, & p_x=\sum m_i v_{ix}=C_x \\
F_y^{\mathrm{ex}}=0, & p_y=\sum m_i v_{iy}=C_y \\
F_z^{\mathrm{ex}}=0, & p_z=\sum m_i v_{iz}=C_z
\end{cases}
$$

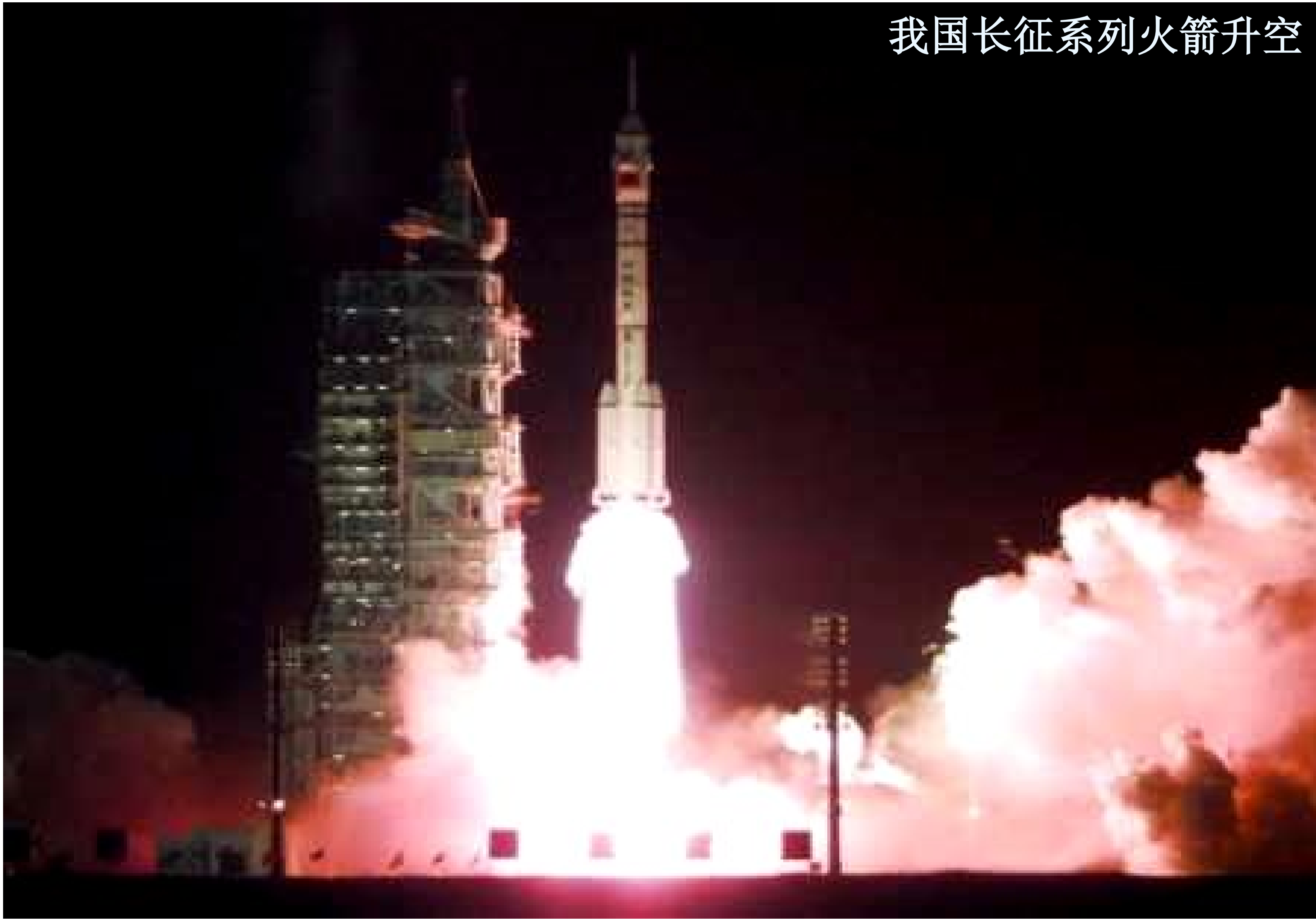
4）动量守恒定律在微观高速范围仍适用。

5）动量守恒定律只在惯性参考系中成立，是自然界最普遍、最基本的定律之一．

大学物理（上）

3　动量守恒定律和能量守恒定律

3.3 火箭飞行原理


我国长征系列火箭升空

光荣的长征火箭家族

中国已经自行研制了四大系列12种型号的运载火箭：

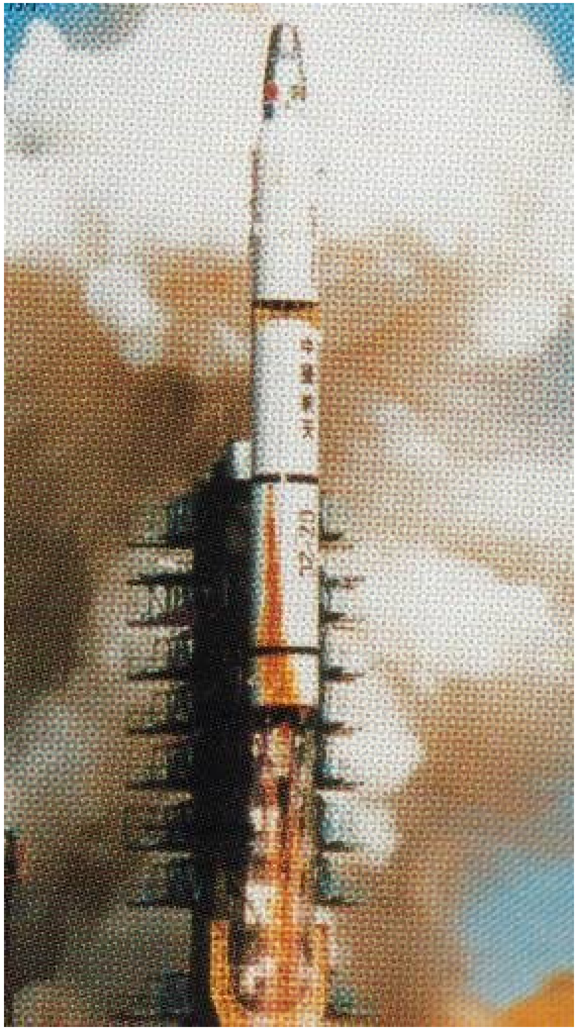
长征1号系列：发射近地轨道小卫星.

长征2号系列：发射近地轨道中、大型卫星，和其它航天器.

长征3号系列：发射地球同步高轨道卫星和航天器.

长征4号系列：发射太阳同步轨道卫星.

长征2号C火箭



从１９７０年４月２４日长征一号火箭成功发射“东方红一号”卫星以来，长征系列运载火箭走过了从常规推进到低温推进、从串联到捆绑、从一箭单星到一箭多星、从发射卫星载荷到发射飞船的技术历程，先后成功地发射了我国第一颗返回式科学技术试验卫星、第一颗通信卫星、第一艘载人飞船，并多次承揽发射国外商业卫星，在国际商业卫星发射服务市场上占有一席之地，成为我国具有自主知识产权和较强国际竞争力的高科技产品。

2007年6月1日，我国在西昌卫星发射中心用“长征三号甲”运载火箭，成功将“鑫诺三号”通信卫星送入太空。此次发射是长征系列运载火箭第100次发射。

2005年10月12日：长征2号F型运载火箭成功发射神舟6号载人飞船。

报道："我们在神舟五号的基础上继续攻克多项载人航天的基本技术，第一次进行了真正有人参与的空间科学实验。"

2003年10月15日：长征2号F运载火箭成功发射神舟5号载人飞船

宇航员费俊龙、聂海胜

2008年9月25日：长征2号F型运载火箭成功发射神舟7号载人飞船。

北京时间二十七日下午四点五十九分，神舟七号航天员翟志刚成功返回轨道舱，这标志着中国历史上第一次太空行走成功完成。

从神舟七号开始，我国进入载人航天二期工程。在这一阶段里，将陆续实现航天员出舱行走、空间交会对接等科学目标。整个二期工程的所有发射任务全部由长二F火箭担任

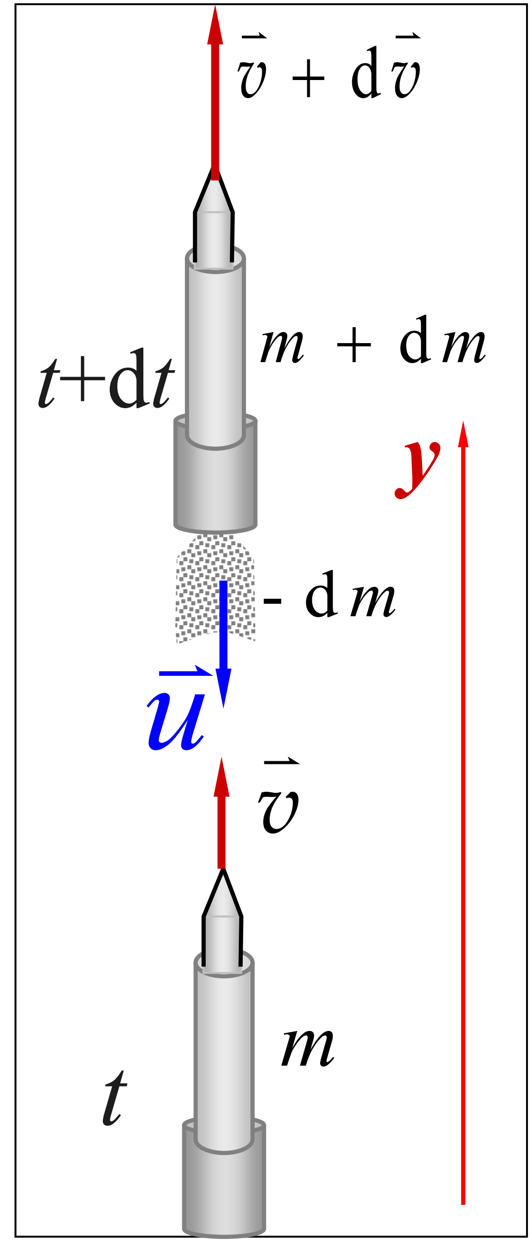
2012年6月16日，长征二号F遥九运载火箭起飞，托举着神舟九号飞船飞向太空。

问： 火箭是如何将地球气象卫星、载人航天飞船、深空宇宙探测器等航天飞行器送上太空的？

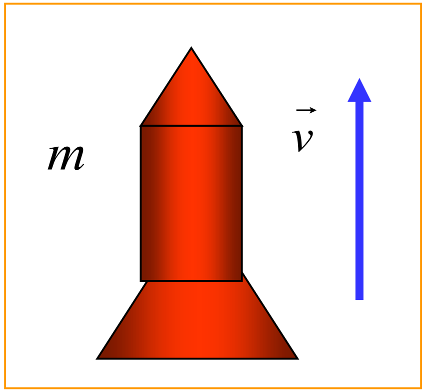
火箭依靠排出其内部燃烧室中产生的气体来获得向前的推力

- **火箭飞行原理简介**

设火箭发射时的质量为m_0，速率为v_0，燃料烧尽时的质量为m'，气体相对于火箭排出的速率为u。不计空气阻力，求火箭所能达到的最大速率。



解： 火箭和燃气组成一个系统。



t 时刻： 系统总质量为 m

系统总动量为 $p = mv$

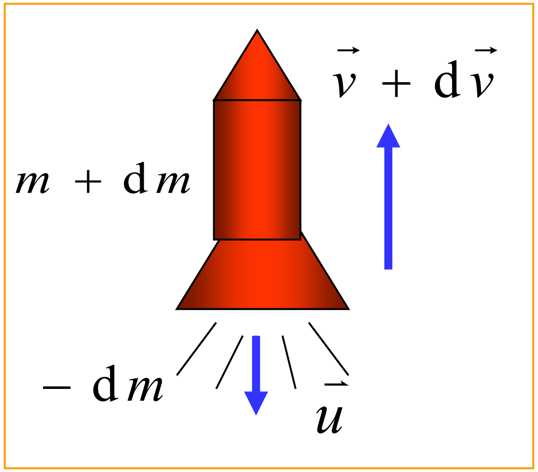
$t + \mathrm{d}t$ 时刻：

火箭质量为 $m + \mathrm{d}m \quad (\mathrm{d}m < 0)$

排出的燃气质量为 $-\mathrm{d}m$

火箭速度为 $v + \mathrm{d}v$

排出的燃气速度为 $(v + \mathrm{d}v) - u$



系统的动量为 $p' = (m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) + (-\mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v - u)$

略去重力，系统总动量守恒 $p = p'$

$$mv = (m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) - \mathrm{d}m(v + \mathrm{d}v - u)$$

$$mv = mv + v\,\mathrm{d}m + m\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}v\,\mathrm{d}m - v\,\mathrm{d}m - \mathrm{d}m\,\mathrm{d}v + u\,\mathrm{d}m$$

整理得，

$$m\,\mathrm{d}v + u\,\mathrm{d}m = 0 \qquad \therefore\ \mathrm{d}v = -u\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v = \int_{m_0}^{m'} -u\frac{\mathrm{d}m}{m} \qquad v = v_0 + u\ln\frac{m_0}{m'}$$

用增大喷气速度和增大质量比的方法可以提高火箭末速度。

➢ 定义质量比 $N = m_0/m'$

$$\therefore v = v_0 + u\ln\frac{m_0}{m'} = u\ln N$$

为了提高火箭的速度，通常采用多级火箭

$$v_1 = u\ln N_1$$

$$v_2 = v_1 + u\ln N_2$$

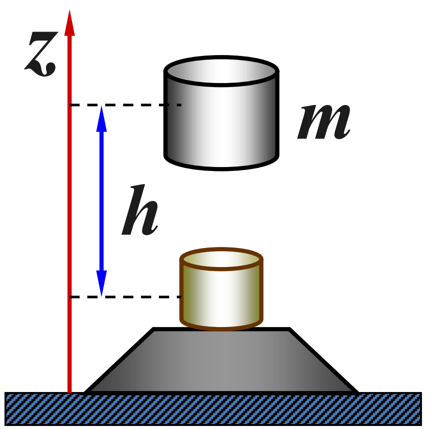
$$v_3 = v_2 + u\ln N_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$v = \sum_i u\ln N_i = u\ln(N_1 N_2 N_3 \cdots)$$

例题和练习

练习： 一重锤从高度 $h=1.5\mathrm{m}$ 处自静止下落，锤与工件碰撞后，速度为零.对于不同的打击时间 Δt，计算平均冲力和重力之比.



解： 撞前锤速 $v_0=-\sqrt{2gh}$，撞后锤速零.

$$\int_0^{\Delta t}(N-mg)\mathrm{d}t=mv_z-mv_0=m\sqrt{2gh}$$

$$\overline{N}\Delta t-mg\Delta t=m\sqrt{2gh}$$

$$\frac{\overline{N}}{mg}=1+\frac{1}{\Delta t}\sqrt{\frac{2h}{g}}=1+\frac{0.55}{\Delta t}$$

$\Delta t/\mathrm{s}$	0.1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$\overline{N}/mg$	6.5	56	5.5×10^{2}	5.5×10^{3}

在碰撞或打击瞬间常忽略重力作用

例 一质量为m的小球，以速率为v_0、与水平面夹角为 60° 的仰角作斜抛运动，不计空气阻力，小球从抛出点到最高点这一过程中所受合外力的冲量大小为$\underline{\sqrt{3}mv_0/2}$，冲量的方向是$\underline{\text{沿 } y \text{ 轴负方向}}$.

解:
$$\vec{I} = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$
$$= m\frac{1}{2}v_0\vec{i} - m\left(\frac{1}{2}v_0\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0\vec{j}\right)$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}mv_0\vec{j}$$

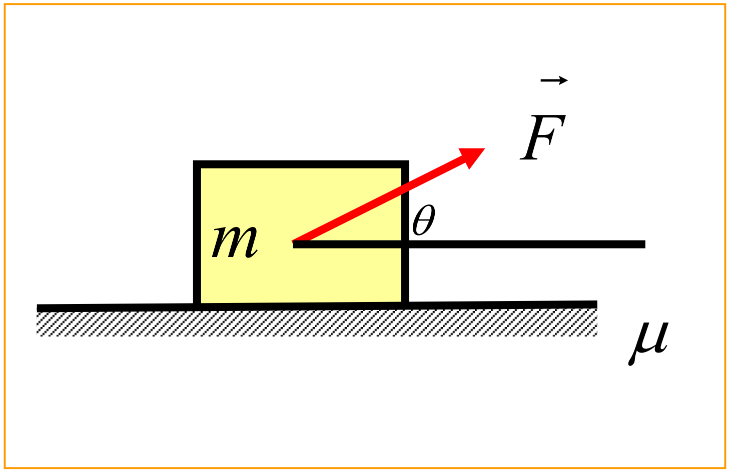
画图
受力分析
很重要！

冲量大小：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}mv_0$，方向沿 y 轴负方向.

例1 已知：$m = 1\text{kg}$　$v_0 = 0$　$F = 1.12t$　$\theta = 37^\circ$

$\mu = 0.2$　$g \approx 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

求：$t = 3\text{s}$ 时 $\vec{v} = ?$



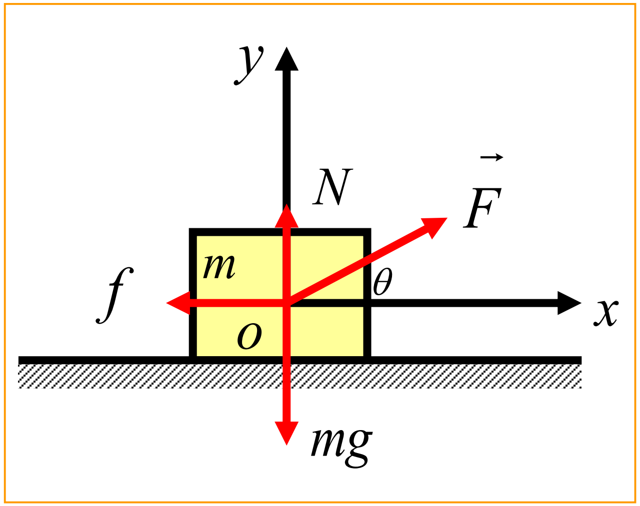
$$F_y = N - mg + F\sin 37^\circ = 0$$

$$N = 10 - 0.672t \qquad (1)$$

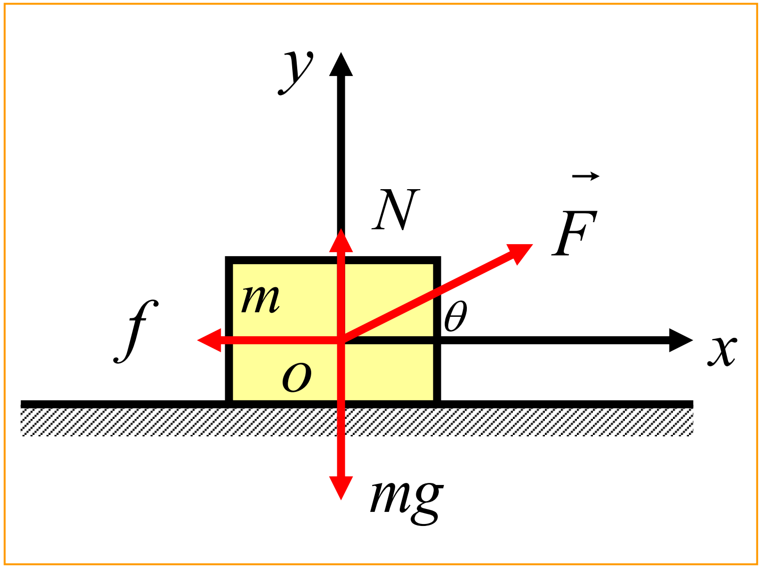
$$f = \mu N = 2 - 0.1344t \qquad (2)$$

$$F_x = F\cos 37^\circ - f = 1.03t - 2 \qquad (3)$$

$$\int_0^3 F_x \mathrm{d}t = \Delta mv_x = mv_3 \qquad (4)$$



对不对？



(1)： $N = 10 - 0.672t$?

$t\uparrow$ ， $F = 1.12t\uparrow$

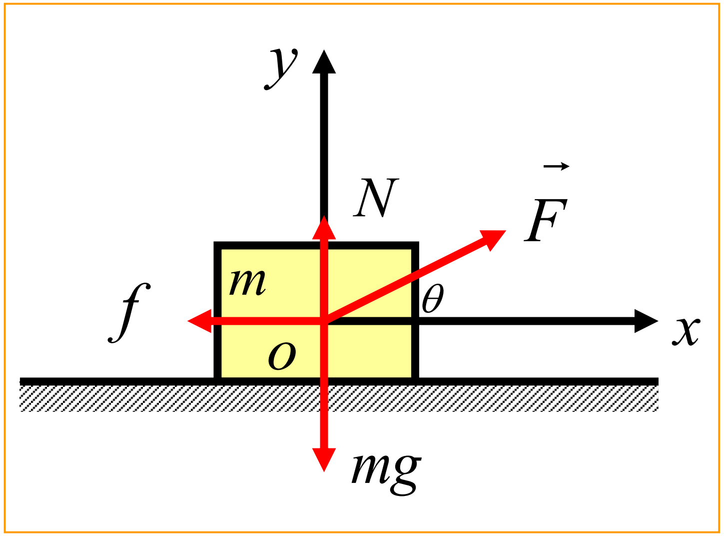
物体可能飞离桌面，

何时飞离？

令 $10 - 0.672t = 0$ 得： $t = 14.9\ \text{s}$

$$\begin{cases} N = 10 - 0.672t & (0 < t < 14.9\ \text{s}) \\ N = 0 & (t > 14.9\ \text{s}) \end{cases}$$

$t = 3\ \text{s}$ 时，尚未飞离， $\vec{v}$ 沿 x 方向 .



$$(2):\quad f=\mu N=2-0.1344t$$?

静摩擦力达到最大值以前与正压力无关。物体何时开始运动？

$$F\cos\theta=\mu \mathrm{N}$$

$$0.896t=2-0.1344t \qquad t=1.94s$$

$$\begin{cases} f=F\cos\theta=0.896t & (0<t<1.94) \\ f=\mu N=2-0.1344t & (1.94<t<14.9) \end{cases}$$

$$(3):\quad F_x=F\cos37^\circ-f=1.03t-2$$?

则：

$$F_x=F\cos\theta-f=\begin{cases} 0 & (0\le t\le 1.94) \\ 1.03t-2 & (1.94\le t\le 14.9) \end{cases}$$

$$F_x = F\cos\theta - f = \begin{cases} 0 & (0 \le t \le 1.94) \\ 1.03t - 2 & (1.94 \le t \le 14.9) \end{cases}$$

$$(4): \quad \int_0^3 F_x \mathrm{d}t = \Delta mv_x = mv_3 \quad ?$$

$$\int_0^3 F_x \mathrm{d}t = 0 + \int_{1.94}^3 (1.03t - 2)\mathrm{d}t = mv_3$$

$$v_3 = 0.58 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$\vec{v}_3 = 0.58\,\vec{i} \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

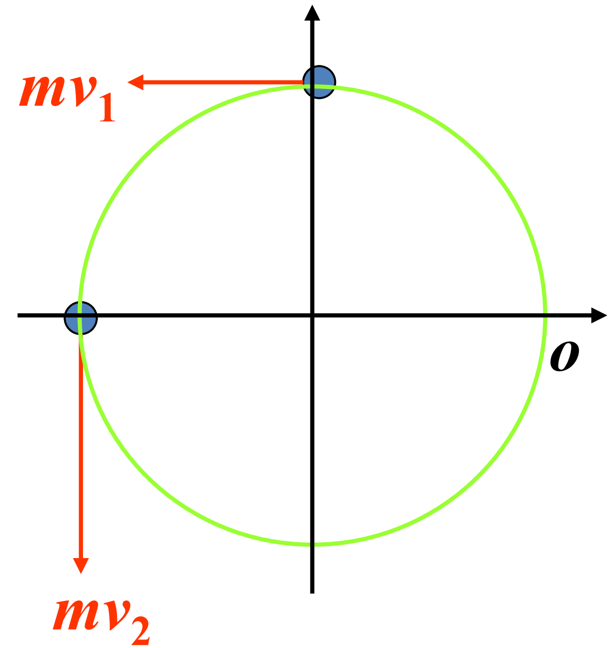
通过本题体会存在变力作用时的动量定理应用

例2 质量m=1kg的质点从o点开始沿半径R=2m的圆周运动。以o点为自然坐系标固定点。已知质点的运动方程为$s=0.5\pi t^2$ m。试求从$t_1=\sqrt{2}$s到$t_2=2$s这段时间内质点所受合外力的冲量。

解:

$$s_1=\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}^2=\pi \qquad \theta_1=\frac{s_1}{R}=\frac{\pi}{2}$$

$$s_2=\frac{1}{2}\pi 2^2=2\pi \qquad \theta_2=\frac{s_2}{R}=\pi$$

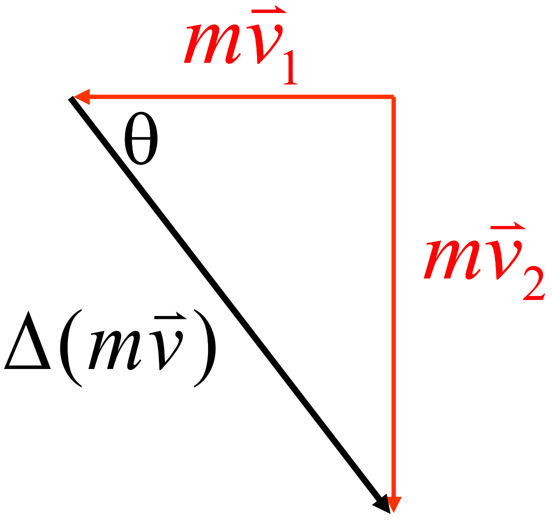


$$v=\frac{ds}{dt}=\pi t$$

$$v_1=\sqrt{2}\pi \quad (\mathrm{m\cdot s^{-1}}) \qquad v_2=2\pi \quad (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

$$mv_1 = \sqrt{2}\pi \quad (\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}})$$

$$mv_2 = 2\pi \quad (\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}})$$



$$\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta(m\vec{v})$$

$$|\Delta m\vec{v}| = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv_2)^2} = \sqrt{2\pi^2 + 4\pi^2} = \sqrt{6}\pi \ (\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}})$$

$$|\vec{I}| = \sqrt{6}\pi = 7.69 \ (kg \cdot m \cdot s^{-1})$$

$$tg\theta = \frac{mv_2}{mv_1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad \theta = 54°44'$$

例3 一颗子弹在枪筒里前进时所受的合力大小为 $F=400-4\times10^{5}t/3$，子弹从枪口射出时的速率为300m/s。设子弹离开枪口处合力刚好为零。求：（1）子弹走完枪筒全长所用的时间t。（2）子弹在枪筒中所受力的冲量I。（3）子弹的质量。

解：（1）$F=400-\dfrac{4\times10^{5}}{3}t=0$　　$t=\dfrac{3\times400}{4\times10^{5}}=0.003\,\mathrm{s}$

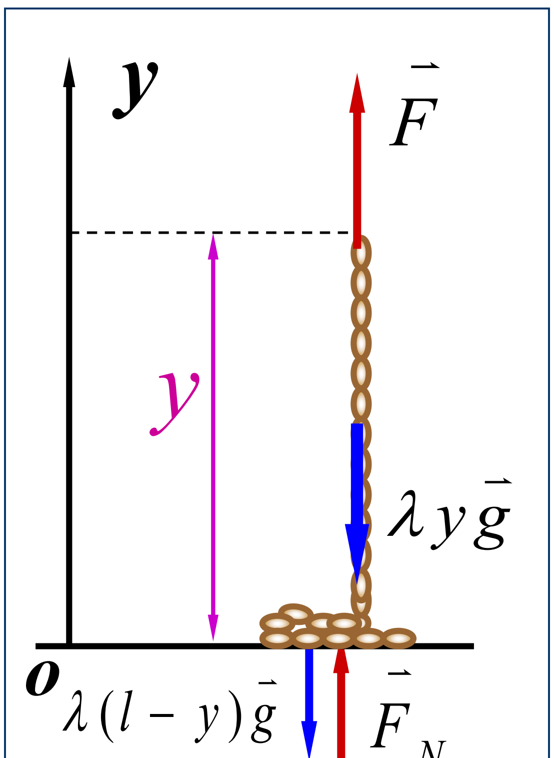
（2）

$$I=\int F\mathrm{d}t=\int_{0}^{0.003}\left(400-\frac{4\times10^{5}}{3}t\right)\mathrm{d}t=400t-\frac{4\times10^{5}t^{2}}{2\times3}\bigg|_{0}^{0.003}=0.6\,\mathrm{N\cdot s}$$

（3）

$$I=mv-0\qquad m=\frac{I}{v}=\frac{0.6}{300}=0.002\mathrm{kg}=2\,\mathrm{g}$$

例4 一长为 l、密度均匀的柔软链条，其单位长度的质量为λ． 将其卷成一堆放在地面上． 若手提链条的一端， 以匀速 v 将其上提． 当一端被提离地面高度为 y 时，**求**手的提力．



解 取地面参考系，链条为系统．

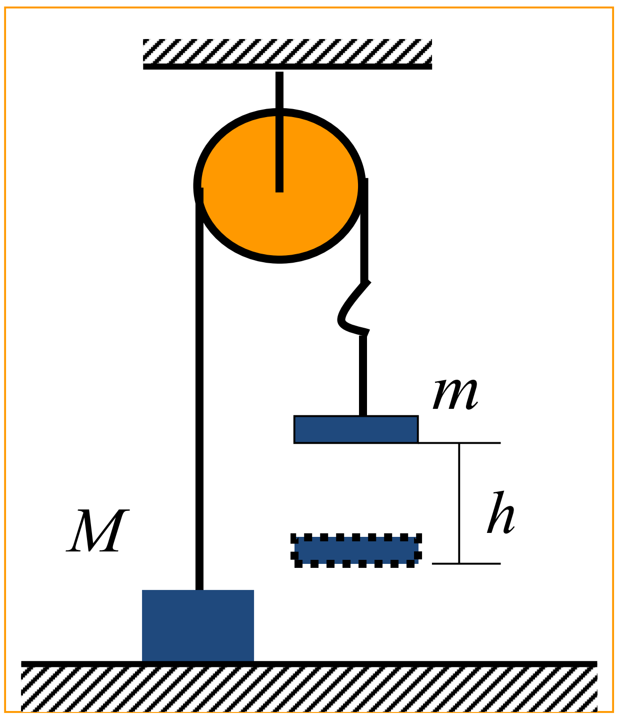
在 t 时刻链条动量 $\vec{p}(t)=\lambda y v\,\vec{j}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\lambda v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}=\lambda v^2\vec{j}$$

$$\vec{F}+\lambda y\vec{g}=(F-\lambda yg)\vec{j}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

可得 $\vec{F}=\left(\lambda v^2+\lambda yg\right)\vec{j}$

例：一绳跨过一定滑轮，两端分别系有质量m及M的物体，且$M>m$ 。最初M静止在桌上，抬高m使绳处于松弛状态。当m自由下落距离h后，绳才被拉紧，求此时两物体的速率v和M所能上升的最大高度(不计滑轮和绳的质量、轴承摩擦及绳的伸长)。



分析运动过程

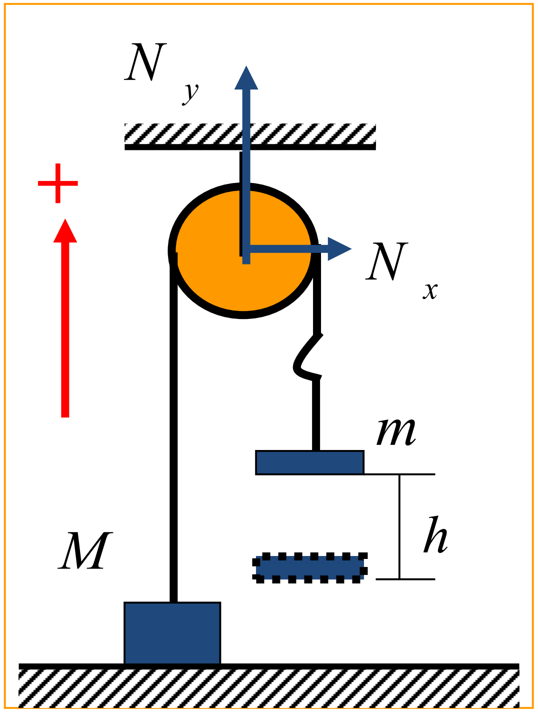
当 m 自由下落 h 距离，绳被拉紧的瞬间，m 和 M 获得相同的运动速率 v，此后 m 向下减速运动，M 向上减速运动。M 上升的最大高度为：

$$H=\frac{v^2}{2a}$$

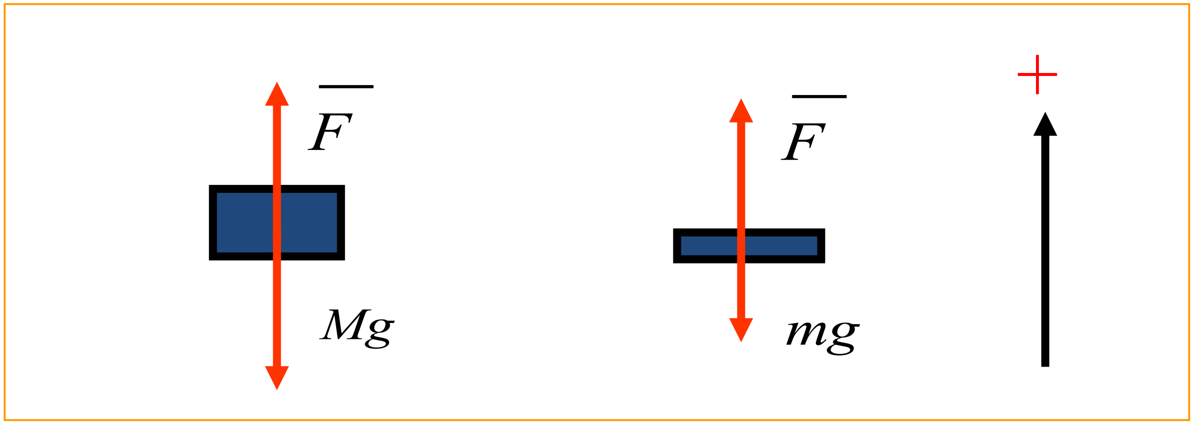
分两个阶段求解

第一阶段：绳拉紧，求共同速率 v

绳拉紧时冲力很大，轮轴反作用力 $\vec{N}$ 不能忽略，$m+M$ 系统动量不守恒，应分别对它们用动量定理；



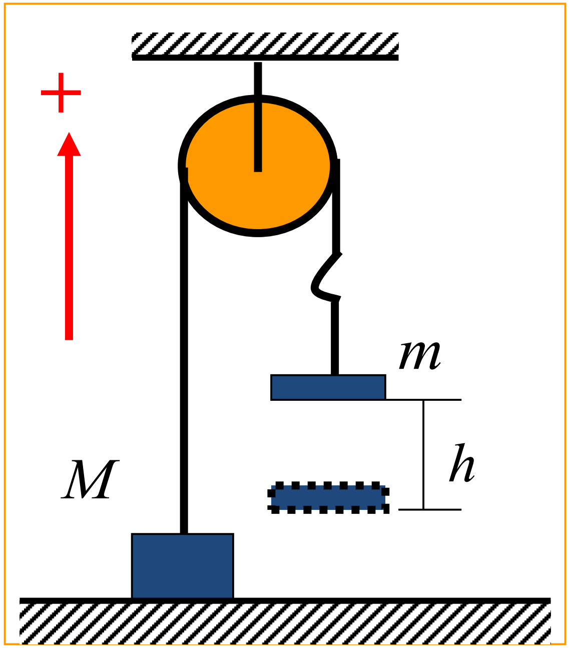
设平均冲力大小为 $\overline{F}$，取向上为正方向



$$I_1=(\overline{F}-mg)\Delta t=-mv-(-m\sqrt{2gh})$$

$$I_2=(\overline{F}-Mg)\Delta t=Mv-0=Mv$$

$$\begin{cases} I_1 = (\overline{F} - mg)\Delta t = -mv - (-m\sqrt{2gh}) \\ I_2 = (\overline{F} - Mg)\Delta t = Mv \end{cases}$$

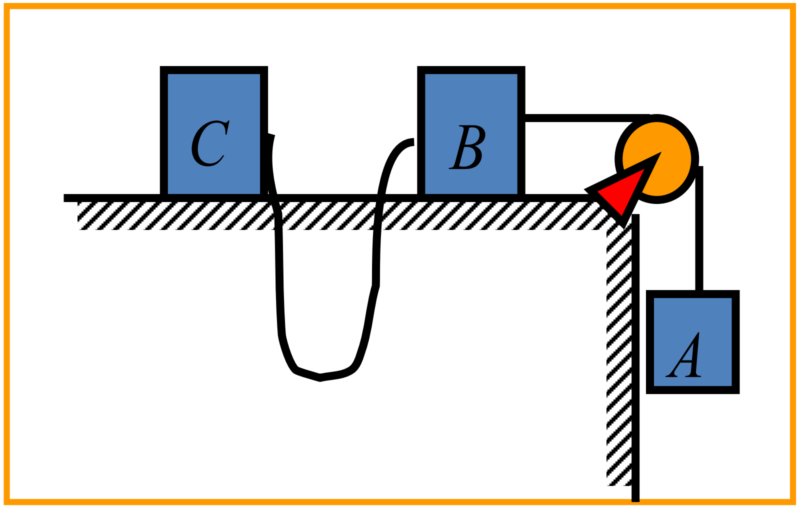


忽略重力，则有 $I_1 = I_2$

$$-mv - (-m\sqrt{2gh}) = Mv$$

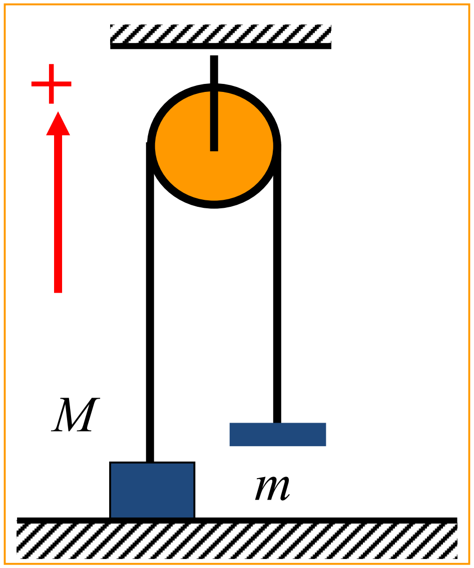
$$v = \frac{m\sqrt{2gh}}{M + m}$$

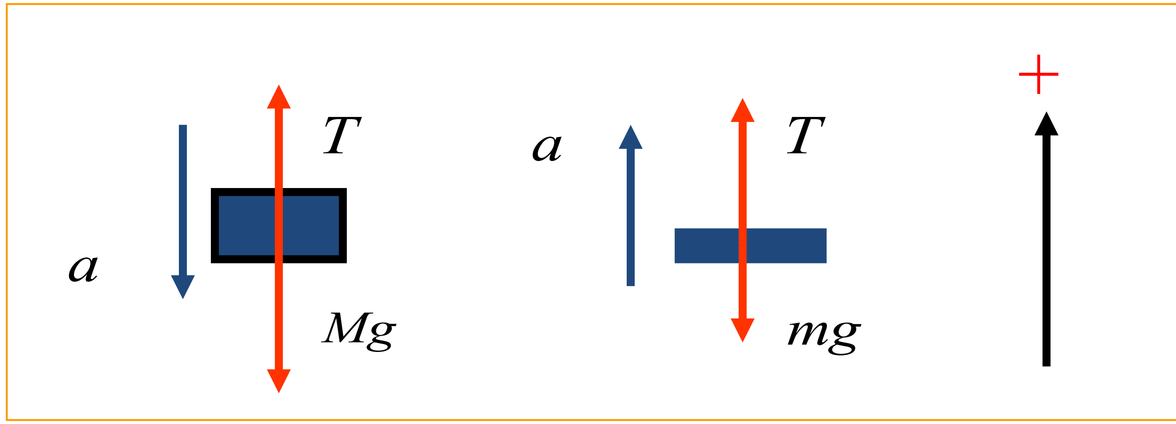
类似问题：



第二阶段： M 与 m 有大小相等，方向相反的加速度 a

设绳拉力为 T ，画出 m 与 M 的受力图





由牛顿运动定律 $\begin{cases} Mg - T = Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$ 解得 $a = \dfrac{(M-m)g}{M+m}$

M 上升的最大高度为

$$H = \frac{v^2}{2a} = \left(\frac{m(\sqrt{2gh}}{M+m}\right)^2 \Bigg/ \left(\frac{2(M-m)g}{M+m}\right) = \frac{m^2 h}{M^2 - m^2}$$

作业

- **P77：8**

版权声明