中原工学院
Zhongyuan University of Technology

# 1　质点运动学

任课教师　曾灏宪

中原工学院　理学院

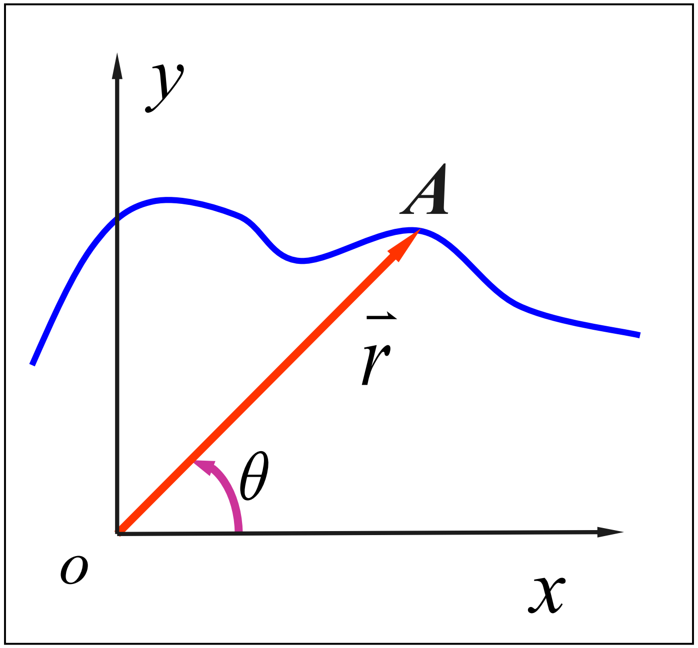
大学物理（上）

1　质点运动学

# 1.3　圆周运动

# 0　平面极坐标系

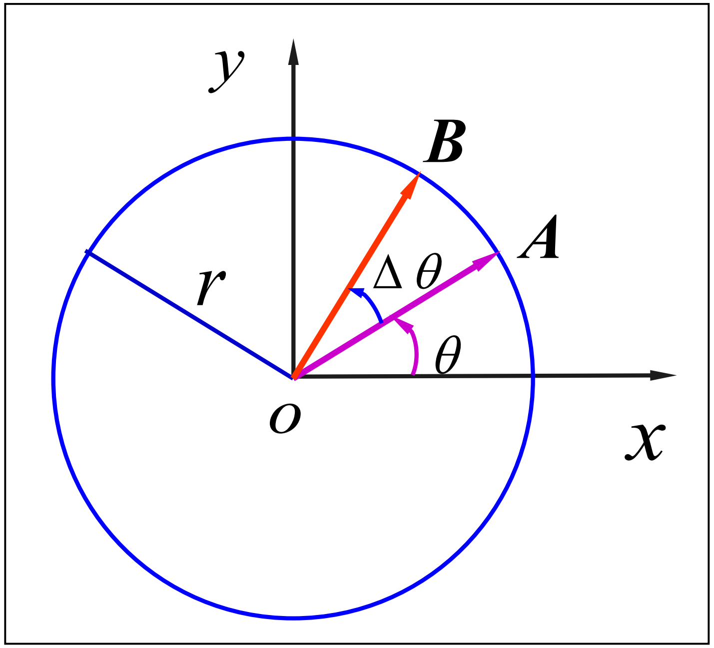
　　设一质点在 $Oxy$ 平面内运动，某时刻它位于点 $A$.矢径 $\vec{r}$ 与 $x$ 轴之间的夹角为 $\theta$ ．于是质点在点 $A$ 的位置可由 $A(r,\theta)$ 来确定．




以 $(r,\theta)$ 为坐标的参考系为平面极坐标系．

与直角坐标系之间的变换关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

# 一 圆周运动的角速度和角加速度




角坐标(角位置) $\theta(t)$

角位移 $\Delta\theta$

角速度 $\omega(t)=\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$

速率 $\boxed{v=r\omega}$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=r\frac{d\theta}{dt},\ v(t)=r\omega(t)$$

角加速度 $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

# 二 匀速率圆周运动

**速度大小不变，但方向时刻在变——加速度？**

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}=v\vec{e}_{\mathrm{t}}=r\omega\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

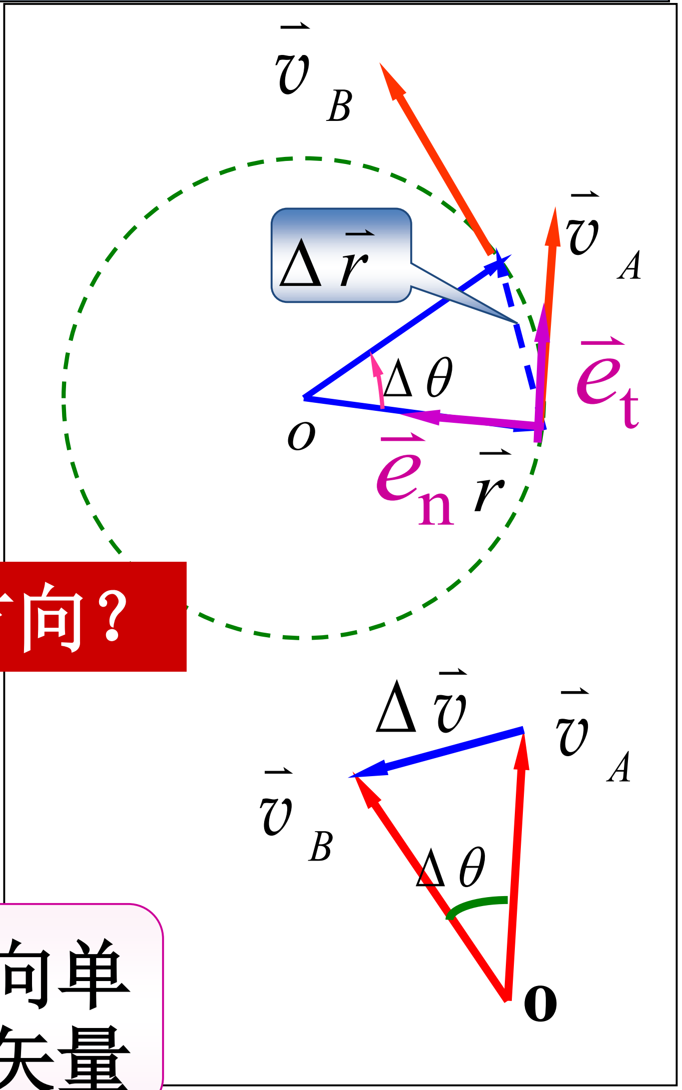
$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v}=\frac{|\Delta\vec{r}|}{r}\Rightarrow\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}=\frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

加速度大小 $|\vec{a}|=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}=\frac{v^2}{r}$ **方向？**

$$\Delta t\to 0,\Delta\theta\to 0,\Delta\vec{v}\perp\vec{v}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{v^2}{r}\vec{e}_{\mathrm{n}}=\omega^2 r\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

法向单位矢量



# 三 变速圆周运动 切向加速度和法向加速度

**速度的大小和方向都在不断变化**

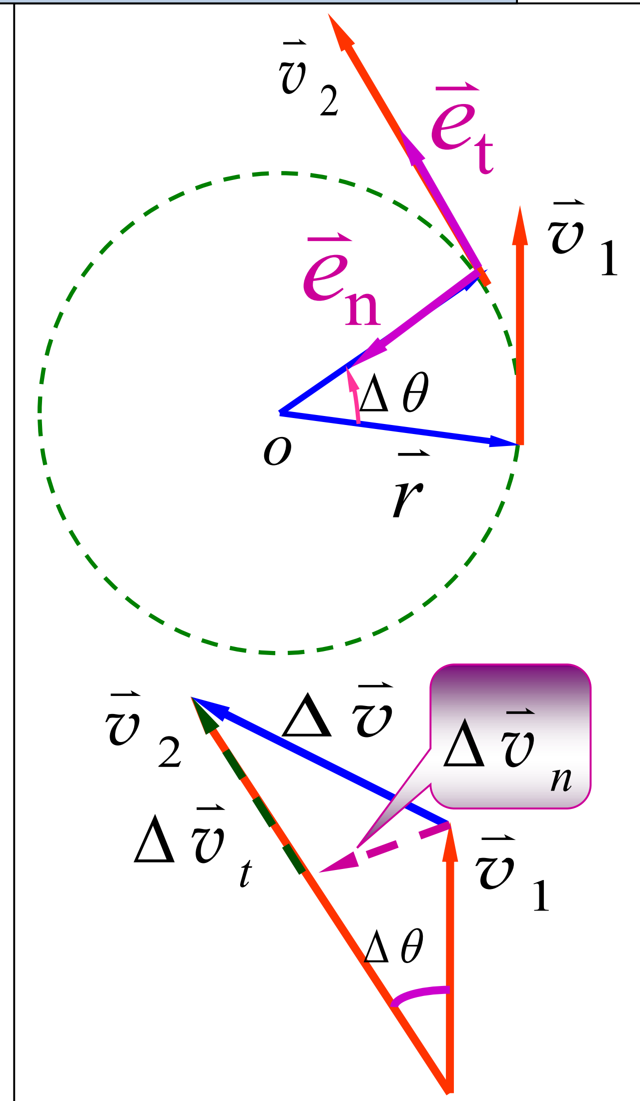
$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_{\mathrm{t}} + \Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}}{\Delta t} = \frac{v^{2}}{r}\vec{e}_{\mathrm{n}} = a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}} = a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}} + a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$



切向加速度（→速度大小变化）

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(r\omega)}{\mathrm{d}t}=r\alpha=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

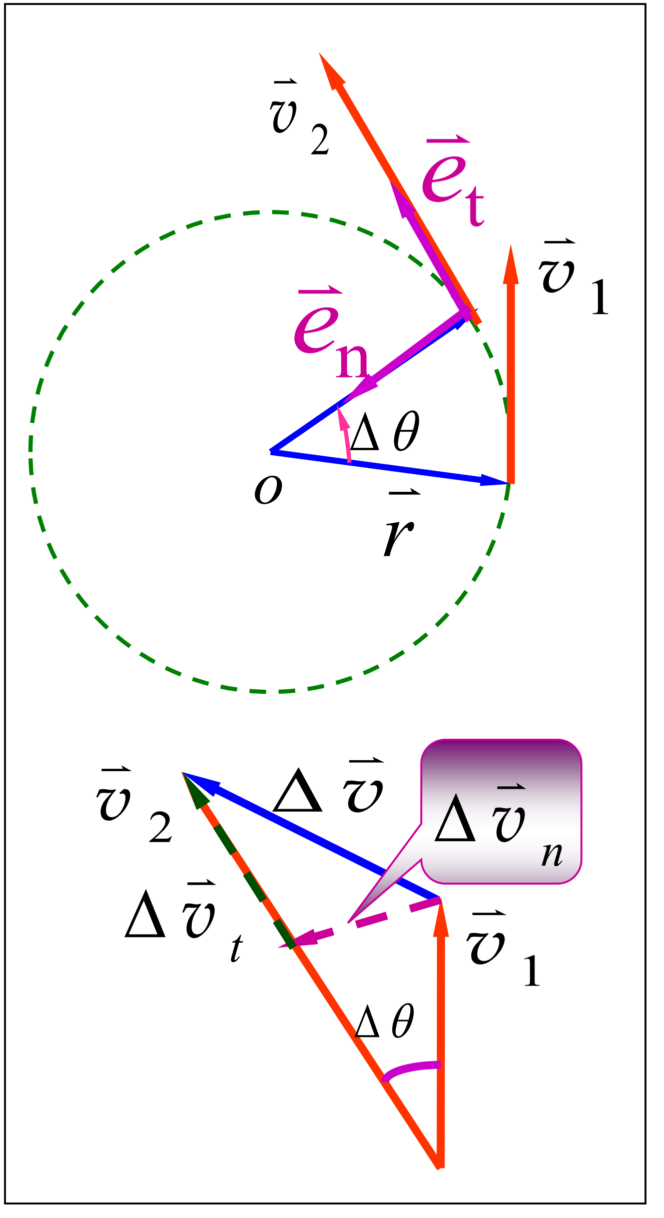
法向加速度（→速度方向变化）

$$a_{\mathrm{n}}=\omega^2 r=\frac{v^2}{r}$$

➢ 圆周运动加速度

$$\vec{a}=a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^2}{r}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^2+a_{\mathrm{n}}^2}$$



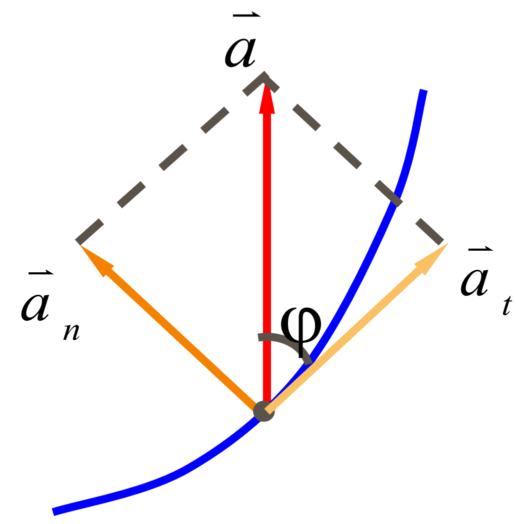
➢对于一般的曲线运动

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}} \qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

其中 $\rho=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ 曲率半径 .

利用自然坐标(坐标原点固接于质点, 坐标轴沿质点运动轨道的切向和法向的坐标系),一切运动都可以根据切向、法向加速度来分类:

| | | |
|---|---|---|
| $a_n=0$ | $a_t=0$ | 匀速直线运动 |
| $a_n=0$ | $a_t\neq 0$ | 变速直线运动 |
| $a_n\neq 0$ | $a_t=0$ | 匀速曲线运动 |
| $a_n\neq 0$ | $a_t\neq 0$ | 变速曲线运动 |




$\vec{a}$ 与 $\vec{a}_t$ 的夹角

$$\tan\varphi=\frac{a_n}{a_t}$$

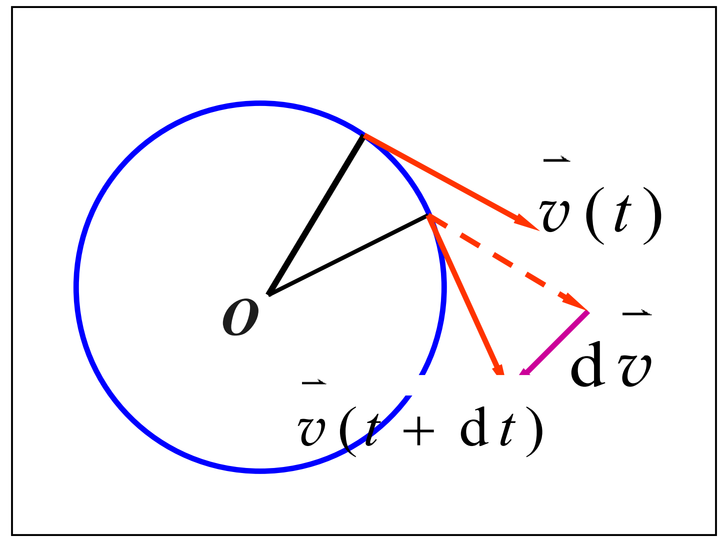
## 讨论：

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r\omega)}{\mathrm{d}t} = r\alpha = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

问 $\left|\vec{a}\right| = a \cancel{=} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 吗？

以匀速率圆周运动为例




因为 $v(t) = v(t+\mathrm{d}t)$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \equiv 0$

而 $a = \left|\vec{a}\right| = \left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| \neq 0$

所以 $a \neq \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

## 讨论：

对于作曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

（A）切向加速度必不为零；

（B）法向加速度必不为零（拐点处除外）；

（C）由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零；

（D）若物体作匀速率运动，其总加速度必为零；

（E）若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，它一定作匀变速率运动．

## 讨论：

**例** 质点作半径为 **R** 的变速圆周运动，加速度大小为：

（1） $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$　　　　（2） $\dfrac{v^2}{R}$

（3） $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\dfrac{v^2}{R}$　　　　★（4） $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2}$

$$\tan\varphi = \frac{a_t}{a_n} = (\frac{b^2t^4}{r^2}+1)^{-1/2}$$

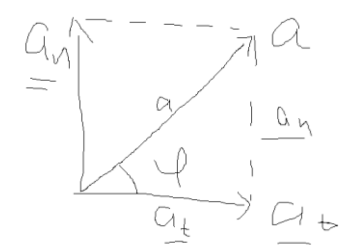
**例1** 设有一个质点作半径为 $r$ 的圆周运动. 质点沿圆周运动所经历的路程与时间的关系为 $s = bt^2/2$, 并设 $b$ 为一常量, **求**（1）此质点在某一时刻的速率;（2）法向加速度和切向加速度的大小;（3）总加速度.

**解:**（1） $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}bt^2) = bt$

（2） $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = b \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(bt)^2}{r}$

（3） $a = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2} = b(\frac{b^2t^4}{r^2} + 1)^{1/2}$

$$\tan\varphi = \frac{a_n}{a_t} = \frac{bt^2}{r}$$



# 四 角加速度 匀变角加速圆周运动公式

- 角加速度 $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
- 切向加速度 $a_{\mathrm{t}} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\alpha$
- 若 $\alpha$ = 常量，$t = 0$ 时，$\theta = \theta_0$，$\omega = \omega_0$，可求

匀变角加速圆周运动公式.

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

注意：仅适用于角加速度为恒量情况.

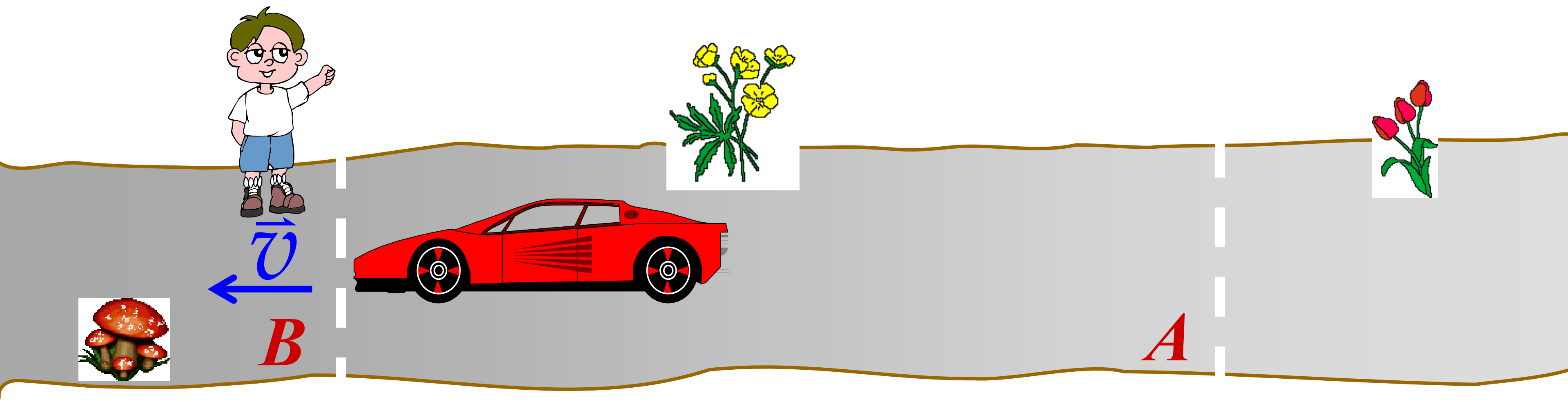
大学物理（上）

1　质点运动学

# 1.4 相对运动

# 一 时间与空间

问：小车以较低的速度 $\vec{v}$ 沿水平轨道先后通过点 $A$ 和点 $B$. 地面上人测得车通过 $A$、$B$ 两点间的距离和时间与车上的人测量结果相同吗？




在两个相对作直线运动的参考系中，时间的测量是绝对的，空间的测量也是绝对的，与参考系无关，时间和长度的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础 .

# 二 相对运动


参考系不同 → 物体运动的轨迹可能不同

# 用数学工具描述相对运动

## 质点在相对作匀速直线运动的两个坐标系中的位移

S 系 $(Oxyz)$

$S'$ 系 $(O'x'y'z')$

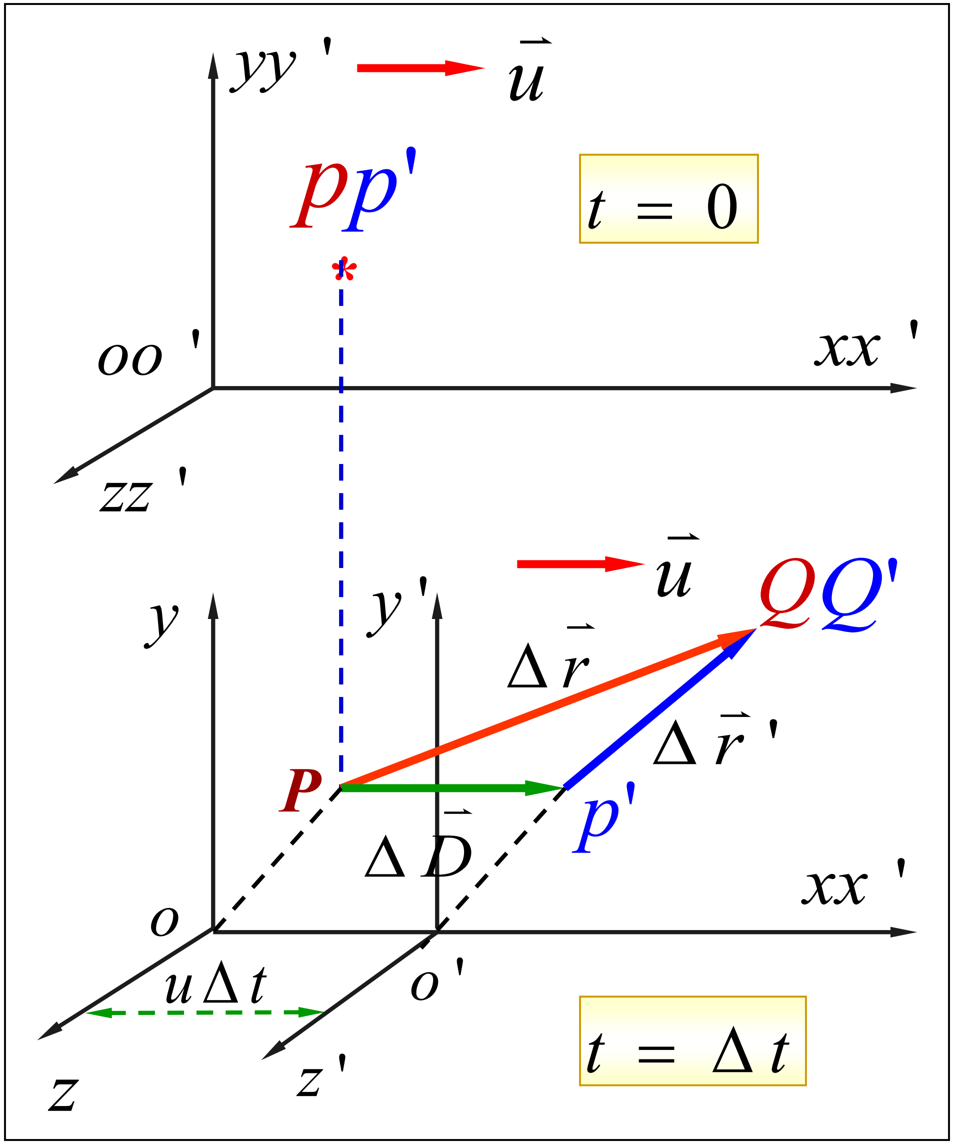
位移关系

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' + \Delta\vec{D}$$

速度变换

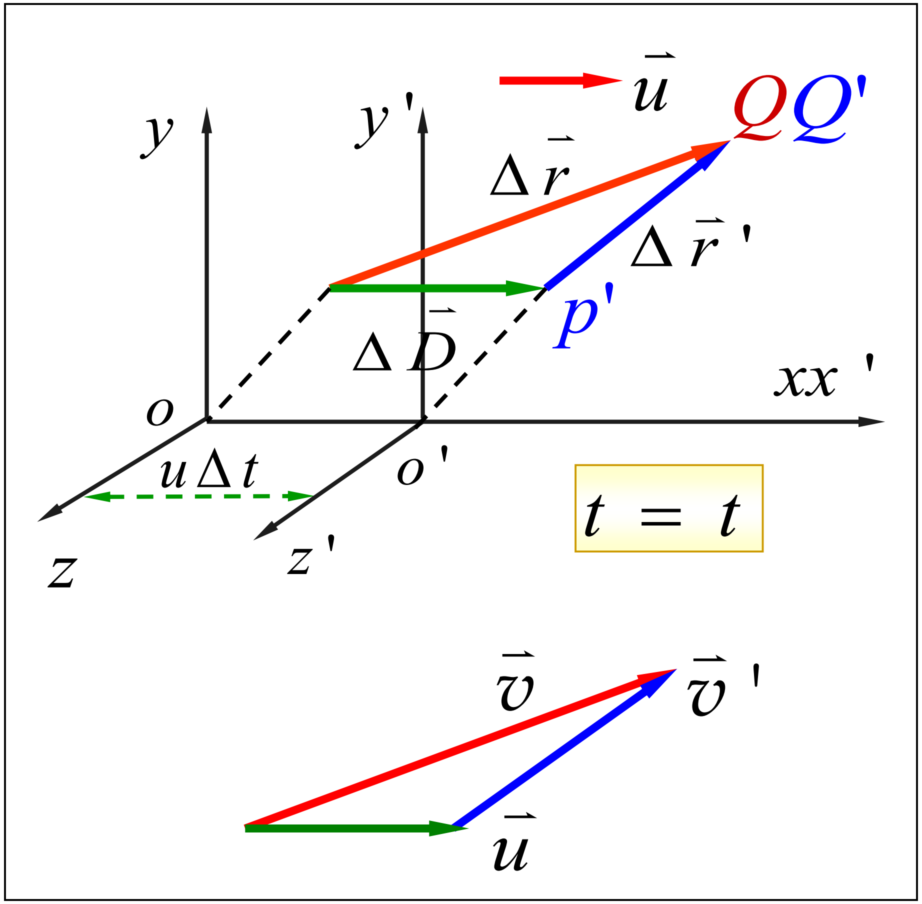
$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t} + \vec{u}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}}$$



## ➢ 伽利略速度变换

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}}$$




绝对速度 $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

相对速度 $\vec{v}\,' = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}$

牵连速度 $\vec{u}$

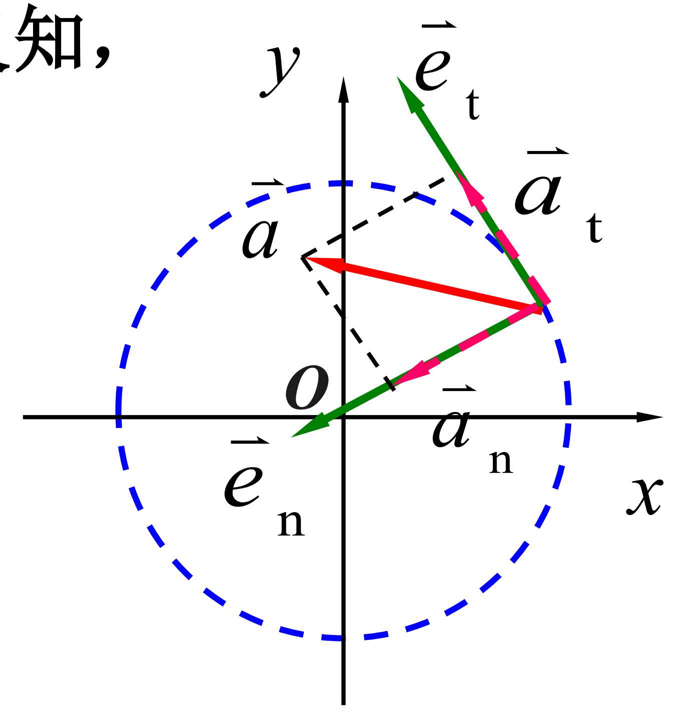
注意 当$\vec{u}$ 接近光速时，伽利略速度变换不成立！

加速度关系 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}\,'}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$　　若 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = 0$ 则 $\vec{a} = \vec{a}\,'$

# 例题与习题

**例：** 如图质点在半径 $r = 0.10\ \mathrm{m}$ 的圆周运动，其角位置为 $\theta = 2 + 4t^3$，**求** $t = 2.0\mathrm{s}$ 时的 $a_n$，$a_t$

**解：** 由角速度和角加速度定义知，




$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 12t^2$$

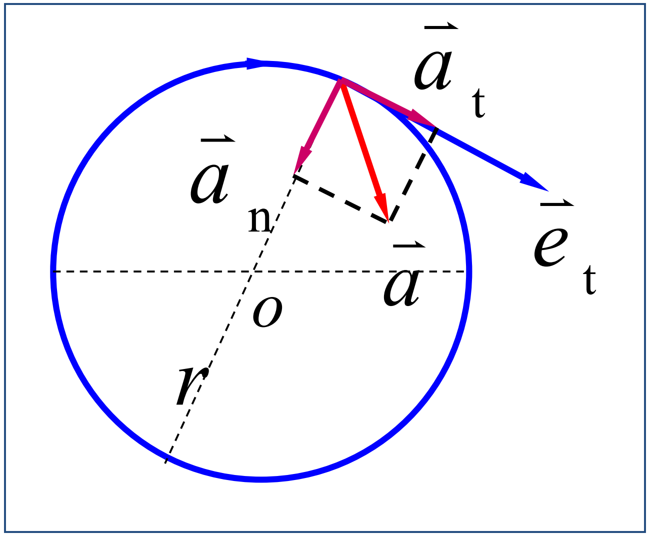
$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = \mathbf{24}\boldsymbol{t}$$

$\boldsymbol{t} = \mathbf{2.0\ s}$ **时，**

$$a_n = \omega^2 r = 2.3 \times 10^2\ \mathrm{m/s}^2$$

$$a_t = r\alpha = 24rt = 4.8\mathrm{m/s}^2$$

例：一质点从静止出发沿半径 $r=3\,\mathrm{m}$ 的圆周运动，切向加速度 $a_t=3\,\mathrm{m/s}^2$ 求：1）$t=?$ 时，$a_t=a_n$；2）在上述时间内，质点所经过的路程.




解：$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t(3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})\mathrm{d}t$$

$$v=(3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t$$

$$a_n=v^2/r=(3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-4})t^2 \qquad a_n=a_t$$

$$3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-4}t^2=3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} \qquad \therefore\ t=1\,\mathrm{s}$$

$$a_t = 3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} \qquad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = (3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t$$

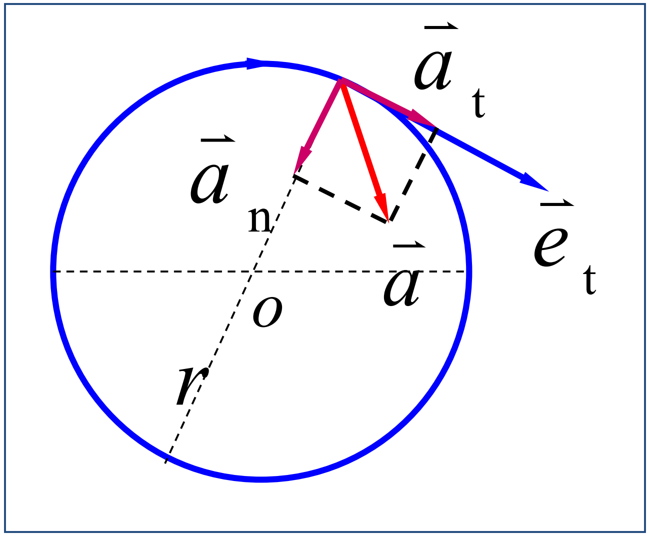
**2）在上述时间内，质点所经过的路程.**

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \int_0^t (3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t\,\mathrm{d}t$$

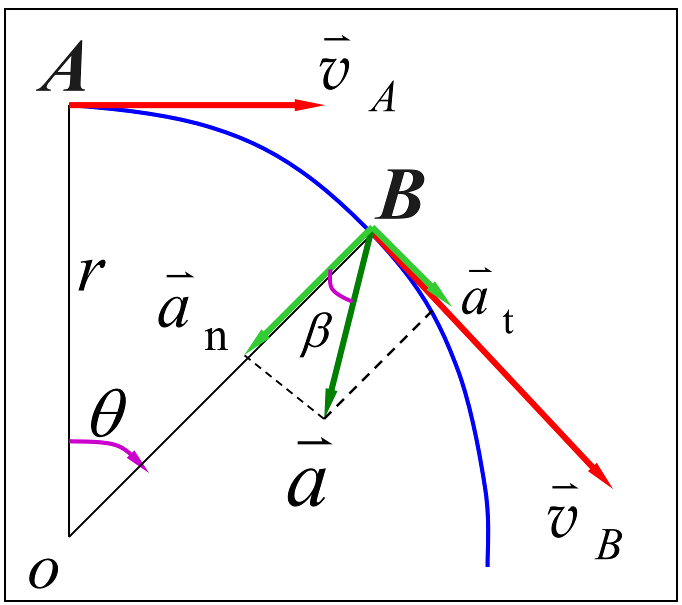
$$s = (1.5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^2$$

$$\therefore\ t = 1s,\quad s = 1.5\,\mathrm{m}$$

$$s = \frac{1}{2}a_t t^2 = 1.5\,\mathrm{m}$$



**例**　如图一超音速歼击机在高空 $A$ 时的水平速率为 1940 km/h，沿近似于圆弧的曲线俯冲到点 $B$，其速率为 2192 km/h，所经历的时间为 3s，设圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的半径约为 3.5km，且飞机从 $A$ 到 $B$ 的俯冲过程可视为匀变速率圆周运动，若不计重力加速度的影响，**求** (1) 飞机在点 $B$ 的加速度；(2)飞机由点$A$ 到点$B$ 所经历的路程．




**解**（1）因飞机作匀变速率运动所以 $a_t$ 和 $\alpha$ 为常量．

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

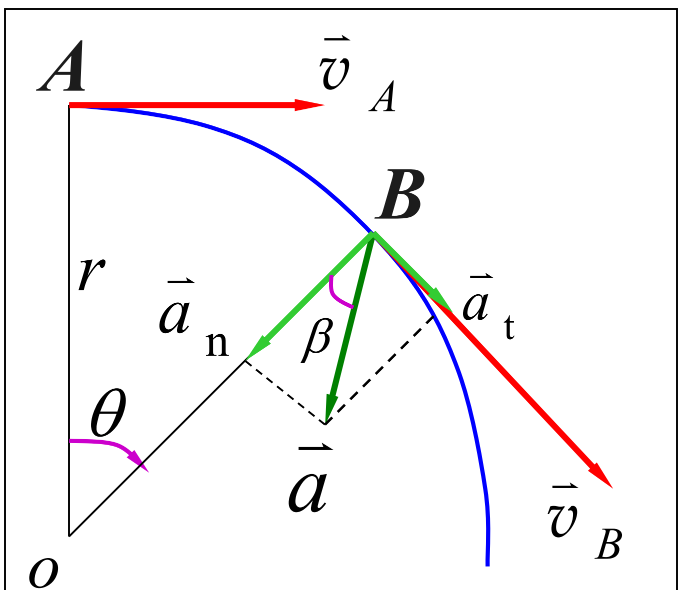
分离变量有 $\int_{v_A}^{v_B} dv = \int_0^t a_t dt$

已知：$v_A = 1940\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ $v_B = 2192\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$

$t = 3\,\mathrm{s}$ $\overset{\frown}{AB}$ 半径 $= 3.5\,\mathrm{km}$

$$\int_{v_A}^{v_B} \mathrm{d}v = \int_0^t a_{\mathrm{t}} \mathrm{d}t \qquad a_{\mathrm{t}} = \frac{v_B - v_A}{t} = 23.3\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

在点 $\boldsymbol{B}$ 的法向加速度 $a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v_B^2}{r} = 106\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$




在点 $\boldsymbol{B}$ 的加速度

$$a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^2 + a_{\mathrm{n}}^2} = 109\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$\vec{a}$ 与法向之间夹角 $\beta$ 为

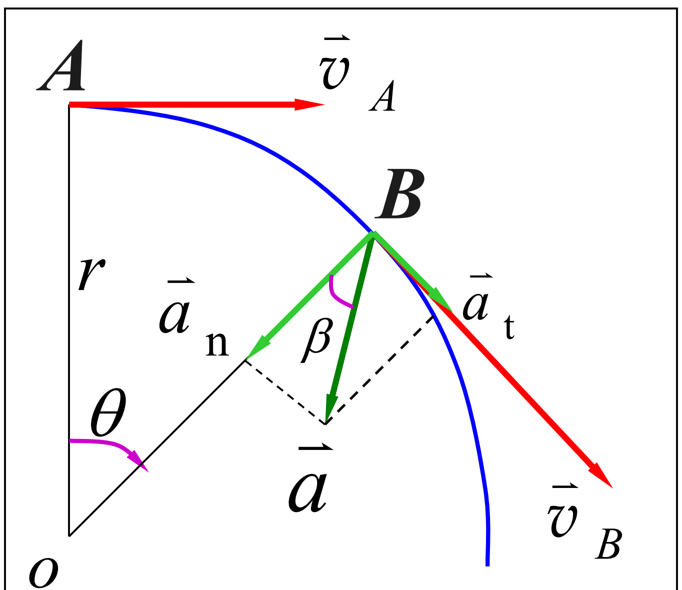
$$\beta = \arctan \frac{a_{\mathrm{t}}}{a_{\mathrm{n}}} = 12.4^\circ$$

已知： $v_A = 1940\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ $v_B = 2192\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$

$t = 3\,\mathrm{s}$ $\overset{\frown}{AB} = 3.5\,\mathrm{km}$

（2）在时间 $t$ 内矢径 $\vec{r}$ 所转过的角度 $\theta$ 为

$$\theta = \omega_A t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$



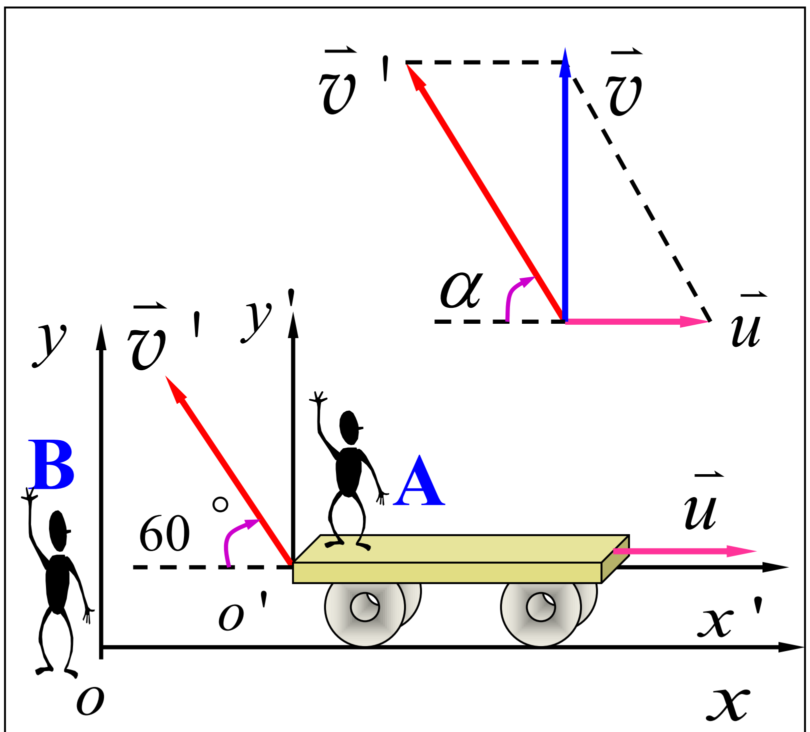

飞机经过的路程为

$$s = r\theta = v_A t + \frac{1}{2}a_t t^2$$

代入数据得

$$s = 1722\ \mathrm{m}$$

**例** 如图示，一实验者 A 在以 10 m/s 的速率沿水平轨道前进的平板车上控制一台弹射器，此弹射器以与车前进方向呈 $60^{\circ}$ 度角斜向上射出一弹丸．此时站在地面上的另一实验者 B 看到弹丸铅直向上运动，求弹丸上升的高度．




**解**：地面参考系为 S 系

平板车参考系为 $S'$ 系

$$\tan\alpha = \frac{v'_y}{v'_x}$$

速度变换

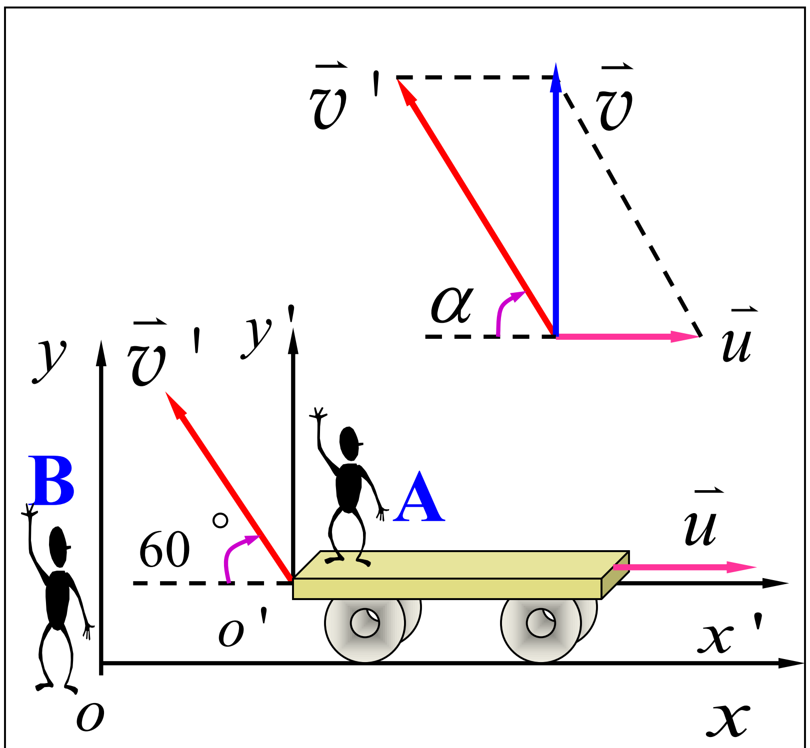
$$v_x = u + v'_x$$

$$v_y = v'_y$$

**解:** 地面参考系为s 系，平板车参考系为 s′ 系.

$$\tan\alpha = \frac{v'_y}{v'_x} \qquad v_x = u + v'_x \qquad v_y = v'_y$$

$$\because\ v_x = 0 \qquad \therefore\ v'_x = -u = -10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$




$$|v_y| = |v'_y| = |v'_x \tan\alpha|$$

$$|v_y| = 17.3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

弹丸上升高度

$$y = \frac{v_y^2}{2g} = 15.3\ \mathrm{m}$$

# 作业

- **P20：13, 20, 21**